ZEITSCHRIFT

FÜR

PHYSIK UND MATHEMATIK.

I.

Analytische Optik;

von

L. Schleiermacher,

Grofsherzogl. Hessisch. Oberfinanzrath in Darmstadt.

Die nachfolgenden Abhandlungen enthalten eine Entwickelung der analytischen Optik, unter der Voraussetzung, dafs die Tangente des halben Gesichtsfeldes, deren Potenzen man gewöhnlich vernachlässigt, eben so wie der Halbmesser der wegen der Helligkeit erforderlichen Öffnung berücksichtigt, und diejenigen Gröfsen der höheren Ordnungen beibehalten werden, welche nicht als unbedeutend zu betrachten sind; sodann eine Anwendung der hierdurch erhaltenen Formeln auf die Construction der optischen Werkzeuge vermittelst der Methode der kleinsten Quadrate. Den Plan, welcher bei dieser Arbeit zu Grunde liegt, und die Motive, welche mich bewogen haben, sie zu unternehmen, habe ich bereits ausführlich in einer Abhandlung angegeben, welche in *Poggendorff's* Annalen der Physik und Chemie, J. 1828, St. 9 abgedruckt ist, ich glaube daher jetzt nur einige Worte hierüber sagen zu müssen.

Die Formeln sind auf diejenigen gegründet, welche *Malus* in seiner Optik für die Brechung des Lichtes in Flächen von beliebiger Gestalt gegeben hat; da es jedoch zur leichteren Entwickelung dieser Formeln noth-

wendig ist, ihnen eine etwas veränderte Gestalt zu geben, so fange ich hiermit an, und gehe dann sogleich zu dem für die Ausübung wichtigen Falle über, in welchem die brechenden Flächen Kugelflächen sind, deren Mittelpuncte sich in einer und derselben geraden Linie befinden.

Dieser Fall begreift die gewöhnlichen dioptrischen und katadioptrischen Werkzeuge in sich, da sich bekanntlich die Brechung in Reflexion verwandelt, wenn das Brechungsverhältniſs $= -1$ gesetzt wird. Damit die Ausdrücke die in der Optik gebräuchliche Gestalt erhalten, wornach sie Functionen von den Vereinigungsweiten der unendlich nahe bei der Axe einfallenden Strahlen sind, betrachte ich die Durchschnittspuncte des gebrochenen Strahles mit einer der coordinirten Ebenen, in welcher sich die Axe des Instrumentes befindet; ferner nehme ich für jede brechende Fläche ein besonderes Coordinatensystem an, indem ich den Ursprung in denjenigen Punct lege, wo die Axe von der brechenden Fläche durchschnitten wird. Bei dieser Voraussetzung sind die Abscissen jener Durchschnittspuncte von den Vereinigungsweiten nur um kleine Gröſsen von der Ordnung der Abweichungen verschieden, daher es leicht wird, die letzteren statt der ersteren in den Formeln einzuführen. Sodann entwickele ich die Ausdrücke in Reihen, indem ich die Gröſsen in verschiedene Ordnungen abtheile, von welchen die erste die genäherten Werthe mit Vernachlässigung der Abweichungen, die folgenden dagegen die Abweichungen wegen der Gestalt und Farbenzerstreuung in- und auſserhalb der Axe enthalten. Fängt man mit den Gröſsen der ersten Ordnung an, geht dann nach und nach zu den folgenden über, und behält in der dritten Ordnung nur diejenigen Glieder bei, welche merkliche Werthe erhalten können, so

wird die Entwickelung sehr einfach und führt zu endlichen Differenzengleichungen von der ersten Ordnung, deren Integrale leicht erhalten werden.

Nachdem auf diese Art die Gleichungen der Strahlen nach den verschiedenen Brechungen auf eine für die Ausübung bequeme Art ausgedrückt worden sind, kann man davon bei den einzelnen Untersuchungen Gebrauch machen, welche sich in der Optik darbieten und eine allgemeine Behandlung zulassen. Die wichtigste hierher gehörige Aufgabe betrifft die Angabe derjenigen Einrichtung der Instrumente, bei welcher die Undeutlichkeit und die Verzerrung so klein als möglich werden. Da bei allen Instrumenten entweder auf einer Ebene oder auf der Netzhaut des hinter denselben befindlichen Auges ein Bild entsteht, auf dessen mögliche Vollkommenheit es hierbei ankommt, so kann man diese durch die Methode der kleinsten Quadrate zu erhalten suchen, wenn man die Seitenabweichungen aller Strahlen, welche das Bild hervorbringen, als die Fehler ansieht, welche durch jene Methode so klein als möglich gemacht werden sollen. Nur mufs man den verschiedenen farbigen Strahlen, aus denen ein auffallender Strahl besteht, und welche bekanntlich nicht einerlei Wirkung im Auge hervorbringen, verschiedene Gewichte beilegen. Diese Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate unterscheidet sich übrigens von der gewöhnlichen dadurch, dafs die Summe der Quadrate der Fehler, welche bei letzterer eine endliche Summe ist, hier wegen der unzähligen Menge der Strahlen durch die Integralrechnung gesucht werden mufs. Eine besondere Rücksicht erfordert bei diesen Untersuchungen die Stellung derjenigen Blendungen, welche die Lage der durch das Instrument gehenden Strahlen bestimmen, mithin einen wesentlichen Einflufs auf die Abweichungen äus-

sern. Bei der den Formeln gegebenen Gestalt veranlafst dieser Umstand keine Schwierigkeiten, und es folgt daraus eine Bestimmung der vortheilhaftesten Stellung jener Blendungen, wenn sie nicht wegen anderer Bedingungen als gegeben betrachtet werden mufs. Nach Beendigung der allgemeinen Untersuchungen bleibt nur noch übrig, sie auf die gebräuchlichen Instrumente anzuwenden und die Dimensionen derselben mit Berücksichtigung der durch die Erfahrung gefundenen Resultate zu bestimmen, welches die zweite Abtheilung dieser Untersuchungen ausmacht.

Brechung des Lichtes in Flächen von beliebiger Gestalt.

1) Ich setze voraus, dafs ein Lichtstrahl nach und nach durch mehrere Mittel von verschiedenem Brechungsvermögen geht, welche von einander durch beliebige, krumme oder ebene Flächen getrennt sind. An jeder dieser Flächen erleidet alsdann der Strahl eine Brechung, welche sich nach den bekannten Gesetzen richtet, dafs nämlich der einfallende und der gebrochene Strahl in einer Ebene liegen, welche durch die Normale am Einfallspuncte geht, und dafs sie mit dieser Normale Winkel bilden, deren Sinus ein beständiges Verhältnifs zu einander haben.

Es seyen nun in Bezug auf eine der brechenden Flächen, welche nach Willkür gewählt werden kann,

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ die rechtwinkeligen Coordinaten eines bestimmten, in dem einfallenden Strahle liegenden Punctes,

$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die Coordinaten des Einfallspunctes,

$$F(\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}\,\mathfrak{Z}) = 0; \quad p\,d\mathfrak{X} + q\,d\mathfrak{Y} + r\,d\mathfrak{Z} = 0 \quad . \quad (a)$$

die Gleichung der brechenden Fläche,

$$\frac{x-\mathfrak{a}}{A} = \frac{y-\mathfrak{b}}{B} = \frac{z-\mathfrak{c}}{C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

$$\frac{x-\mathfrak{X}}{E} = \frac{y-\mathfrak{Y}}{F} = \frac{z-\mathfrak{Z}}{G} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(c)}$$

die Gleichungen des einfallenden und des gebrochenen Strahles,

n das Brechungsverhältniſs,

η und θ der Einfalls- und Brechungswinkel,

so kommt es zuerst darauf an, die Coefficienten der Gleichungen (b) und (c) zu bestimmen.

Für die erstere erhält man sogleich, weil der einfallende Strahl durch die beiden Puncte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}\,\mathfrak{Z}$ geht,

$$\left.\begin{aligned} A &= \mathfrak{X} - \mathfrak{a} \\ B &= \mathfrak{Y} - \mathfrak{b} \\ C &= \mathfrak{Z} - \mathfrak{c} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad \text{(d)}$$

Sodann bilden die geraden Linien (b) und (c) mit der Normale der brechenden Fläche (a) im Puncte $\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}\,\mathfrak{Z}$ die beiden Winkel η und θ, deren Sinus in dem beständigen Verhältnisse n sind, welches durch die Gleichung

$$\frac{\sin.^2 \eta}{n^2} = \sin.^2 \theta$$

ausgedrückt wird. Substituirt man hierin die bekannten analytischen Ausdrücke von $\sin.^2 \eta$ und $\sin.^2 \theta$, so erhält man die Gleichung

$$\frac{(Cq-Br)^2+(Ar-Cp)^2+(Bp-Aq)^2}{n^2(A^2+B^2+C^2)} =$$

$$= \frac{(Gq-Fr)^2+(Er-Gp)^2+(Fp-Eq)^2}{E^2+F^2+G^2} \quad \ldots \quad \text{(e)}$$

Endlich gibt die Bedingung, daſs der einfallende Strahl, der gebrochene Strahl und die Normale der brechenden Fläche in einer Ebene liegen, die Gleichung

$$E(Cq-Br)+F(Ar-Cp)+G(Bp-Aq)=0 \;. \quad \text{(f)}$$

Die beiden Gleichungen (e) und (f) enthalten die Bedingungen, durch welche $\frac{E}{G}$ und $\frac{F}{G}$ bestimmt werden müssen. Setzt man zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} D^2 &= A^2 + B^2 + C^2, \\ s^2 &= p^2 + q^2 + r^2, \\ \alpha &= \frac{Cq - Br}{n}, \\ \beta &= \frac{Ar - Cp}{n}, \\ \gamma &= \frac{Bp - Aq}{n}, \\ \delta^2 &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

und bemerkt, daſs vermöge dieser Werthe von α, β und γ

$$p\alpha + q\beta + r\gamma = 0$$

ist, so geben jene Gleichungen

$$\frac{E}{G} = \frac{D^2 pr + \alpha\gamma \pm \beta\sqrt{D^2 s^2 - \delta^2}}{D^2 r^2 - \alpha^2 - \beta^2},$$

$$\frac{F}{G} = \frac{D^2 qr + \beta\gamma \mp \alpha\sqrt{D^2 s^2 - \delta^2}}{D^2 r^2 - \alpha^2 - \beta^2}.$$

Das obere Zeichen gehört dem gebrochenen Strahle, das untere dagegen einer Linie an, welche einen gleichen Winkel mit der Normale macht, aber auf der entgegengesetzten Seite liegt; und da einer der Coefficienten E, F, G unbestimmt bleibt, mithin nach Willkür angenommen werden darf, so kann man jenen Coefficienten die folgenden Werthe beilegen:

$$\left.\begin{aligned} E &= D^2 pr + \alpha\gamma + \beta\sqrt{D^2 s^2 - \delta^2}, \\ F &= D^2 qr + \beta\gamma - \alpha\sqrt{D^2 s^2 - \delta^2}, \\ G &= D^2 r^2 - \alpha^2 - \beta^2. \end{aligned}\right\} \quad . \quad (h)$$

Diese Formeln geben die Coefficienten E, F, G in Functionen von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, welche

nicht unmittelbar gegeben sind; es bleibt daher noch übrig, sie durch bekannte Gröſsen auszudrücken.

Zu diesem Ende seyen

e, f, g die Coordinaten eines bestimmten, nach Willkür angenommenen Punctes im gebrochenen Strahle,

so geben die Gleichungen (c) und (f), wenn man darin die Werthe (g) substituirt,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{e-\mathfrak{X}}{E} = \frac{f-\mathfrak{Y}}{F} = \frac{g-\mathfrak{Z}}{G}, \\ E\alpha + F\beta + G\gamma = 0, \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (i)$$

und durch Elimination von E, F, G

$$\alpha(e-\mathfrak{X}) + \beta(f-\mathfrak{Y}) + \gamma(g-\mathfrak{Z}) = 0 \quad . \quad (k)$$

Da ferner der gebrochene Strahl durch die Puncte $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ und efg geht, so ist seine Gleichung durch die Coordinaten dieser Puncte ausgedrückt:

$$\frac{x-e}{\mathfrak{X}-e} = \frac{y-f}{\mathfrak{Y}-f} = \frac{z-g}{\mathfrak{Z}-g}, \quad . \quad . \quad . \quad (l)$$

welche die Gleichung (c) ersetzen kann, wenn zwei der Coordinaten e, f, g, von denen eine willkürlich ist, durch die Gleichungen (i) oder (i) und (k) berechnet worden sind.

Ich gehe nun zu der folgenden brechenden Fläche über, und bezeichne alle Gröſsen, welche sich darauf beziehen, indem ich die bisher gebrauchten Buchstaben unten mit einem Striche versehe. In diesem Falle ist der gebrochene Strahl (l) als einfallender Strahl zu betrachten; man kann daher setzen:

$$\left.\begin{array}{l} a_{,} = e, \\ b_{,} = f, \\ c_{,} = g. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (m)$$

Sodann liegt der Punct $\mathfrak{X}_{,}\mathfrak{Y}_{,}\mathfrak{Z}_{,}$ zugleich in dem Strahle (l) und in der folgenden brechenden Fläche, man hat

folglich

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\mathfrak{X}_{,}-\mathfrak{e}}{\mathfrak{X}-\mathfrak{e}}=\dfrac{\mathfrak{Y}_{,}-\mathfrak{f}}{\mathfrak{Y}-\mathfrak{f}}=\dfrac{\mathfrak{Z}_{,}-\mathfrak{g}}{\mathfrak{Z}-\mathfrak{g}},\\ F_{,}(\mathfrak{X}_{,},\mathfrak{Y}_{,},\mathfrak{Z}_{,})=0.\end{array}\right\} \quad .\ .\ .\ (n)$$

Da die Gröſsen $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ in Functionen von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ gegeben sind, so können die Gleichungen (m) und (n) als endliche Differenzengleichungen zwischen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ oder zwischen $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ betrachtet werden. Durch die Integration derselben erhält man daher diese Gröſsen für alle brechende Flächen, wenn man sie für eine derselben als bekannt annimmt.

Ist die Menge der Lichtstrahlen durch eine Blendung beschränkt, welche an einer beliebigen Stelle angebracht seyn kann, so ist es von Wichtigkeit, denjenigen Strahl zu kennen, welcher durch einen gegebenen Punct derselben geht. Da dieser Punct zugleich dem Lichtstrahle angehört, so ist hierzu weiter nichts erforderlich, als daſs man in der Gleichung des letzteren xyz in die Coordinaten des gegebenen Punctes verwandelt, denn es entsteht dadurch eine Relation zwischen diesen Coordinaten und denen des Einfallspunctes auf einer der brechenden Flächen, welche hinreicht, die letzteren durch die ersteren zu bestimmen.

Übrigens kann hier bemerkt werden, daſs sich die vorhergehenden Formeln alle in die correspondirenden für die Reflexion des Lichtes verwandeln, wenn man darin $n = -1$ setzt. Die Resultate, welche die weitere Entwickelung derselben gibt, enthalten daher als besonderen Fall die Katoptrik, und aus diesem Grunde ist es unnöthig, die letztere abgesondert zu behandeln.

Brechung in sphärischen Flächen.

2) Die optischen Werkzeuge sind gewöhnlich aus sphärischen Linsen oder Spiegeln zusammengesetzt; betrachten wir daher den Fall, in welchem alle brechende Flächen sphärisch sind.

Ich setze voraus, dafs sich ihre Mittelpuncte sämmtlich in einer und derselben geraden Linie befinden, welche ich die *Axe des Instruments* nenne, und dafs ihre Concavitäten dem leuchtenden Puncte zugekehrt sind, von welchem der Lichtstrahl ausgeht.

Da die Endresultate von der Lage der Coordinatenaxen unabhängig sind, so nehme ich die Axe des Instruments als Axe der z an, und lasse die Ebene der yz durch den leuchtenden Punct gehen, welchen ich zu demjenigen wähle, dessen Coordinaten durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ bezeichnet worden sind. Diese Voraussetzung gibt für die erste brechende Fläche

$$\mathfrak{a} = o,$$

und wenn man für den willkürlichen Punct $\mathfrak{e}\,\mathfrak{f}\,\mathfrak{g}$ denjenigen nimmt, in welchem der gebrochene Strahl die Ebene der yz dnrchschneidet, so hat man für alle brechende Flächen

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{e} = o.$$

Endlich wähle ich für jede brechende Fläche einen besonderen Ursprung der Coordinaten, indem ich ihn mit dem Puncte zusammenfallen lasse, in welchem die Axe der z durch die Fläche durchschnitten wird.

Bezeichnet man ferner durch

a den Halbmesser von einer der brechenden Flächen, so ist ihre Gleichung

$$F(\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}\,\mathfrak{Z}) = \mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + (a - \mathfrak{Z})^2 - a^2 = o. \quad \text{(a)}$$

Man hat folglich

$$
\begin{aligned}
A &= \mathfrak{X}, \\
B &= \mathfrak{Y} - \mathfrak{b}, \\
C &= \mathfrak{Z} - \mathfrak{c}, \\
D^2 &= \mathfrak{X}^2 + (\mathfrak{Y} - \mathfrak{b})^2 + (\mathfrak{Z} - \mathfrak{c})^2, \\
p &= \mathfrak{X}, \\
q &= \mathfrak{Y}, \\
r &= -(a - \mathfrak{Z}), \\
s^2 &= a^2, \\
\alpha &= -\frac{1}{n}[(\mathfrak{c} - a)\mathfrak{Y} + \mathfrak{b}(a - \mathfrak{Z})], \\
\beta &= \frac{(\mathfrak{c} - a)\mathfrak{X}}{n}, \\
\gamma &= -\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{X}}{n}, \\
\delta^2 &= \frac{1}{n^2}\left\{[(\mathfrak{c} - a)\mathfrak{Y} + \mathfrak{b}(a - \mathfrak{Z})]^2 + \mathfrak{X}^2[(\mathfrak{c} - a)^2 + \mathfrak{b}^2]\right\}
\end{aligned}
$$

Eliminirt man nun aus diesen Ausdrücken $\mathfrak{X}^2$ vermittelst seines Werthes

$$\mathfrak{X}^2 = 2a\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}^2 - \mathfrak{Y}^2,$$

welcher aus der Gleichung (a) folgt, und setzt zur Abkürzung

$$
\left.
\begin{aligned}
\mathfrak{h} &= \frac{1}{\mathfrak{c}}, \\
\mathfrak{k} &= \frac{1}{a} - \frac{1}{\mathfrak{c}}, \\
\mathfrak{l} &= \frac{\delta^2}{a^2\mathfrak{c}} = \frac{1}{n^2}\left\{\begin{aligned}&\mathfrak{k}^2 \cdot 2a\mathfrak{Z} + 2\mathfrak{k}\mathfrak{Y}\mathfrak{h}\mathfrak{b} + \mathfrak{h}^2\mathfrak{b}^2 \\ &\quad - [\mathfrak{k}\mathfrak{Z} + (\mathfrak{k} + \mathfrak{h})\mathfrak{Y}\mathfrak{h}\mathfrak{b}]^2,\end{aligned}\right\} \\
\mathfrak{m} &= -\mathfrak{k}\mathfrak{h} \cdot 2a\mathfrak{Z} - 2\mathfrak{h}\mathfrak{Y}\mathfrak{h}\mathfrak{b} + \mathfrak{h}^2\mathfrak{b}^2, \\
\mathfrak{t} &= \mathfrak{m} - (\mathfrak{k} + \mathfrak{h})(1 + \mathfrak{m})\mathfrak{Z} - \frac{\mathfrak{k}\mathfrak{Y}\mathfrak{h}\mathfrak{b}}{n^2} \\
&\quad - \frac{[1 - (\mathfrak{k} + \mathfrak{h})\mathfrak{Z}]}{n^2}\mathfrak{h}^2\mathfrak{b}^2, \\
\mathfrak{u} &= \mathfrak{m} - \mathfrak{l}, \\
\mathfrak{w} &= \mathfrak{m} - \mathfrak{l} - \mathfrak{Z}(\mathfrak{k} + \mathfrak{h})(1 + \mathfrak{m})[2 - (\mathfrak{k} + \mathfrak{h})\mathfrak{Z}] \\
&\quad + \frac{(\mathfrak{k} + \mathfrak{h})^2}{n^2}(2a\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}^2 - \mathfrak{Y}^2)\mathfrak{h}^2\mathfrak{b}^2,
\end{aligned}
\right| \quad \text{(b)}
$$

so erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a} &= \mathfrak{k} + \mathfrak{h}, \\
D^2 &= \mathfrak{c}^2 (1 + \mathfrak{m}), \\
p &= \mathfrak{X}, \\
q &= \mathfrak{Y}, \\
r &= - a [1 - (\mathfrak{k} + \mathfrak{h}) \mathfrak{Z}], \\
s^2 &= a^2, \\
\alpha &= - \frac{a \mathfrak{c}}{n} \left\{ \mathfrak{k} \mathfrak{Y} + [1 - (\mathfrak{k} + \mathfrak{h}) \mathfrak{Z}] \mathfrak{h} \mathfrak{b} \right\}, \\
\beta &= \frac{a \mathfrak{c} \mathfrak{k} \mathfrak{X}}{n}, \\
\gamma &= - \frac{a \mathfrak{c} (\mathfrak{k} + \mathfrak{h}) \mathfrak{X} \mathfrak{h} \mathfrak{b}}{n}, \\
\delta^2 &= a^2 \mathfrak{c}^2 \mathfrak{l}, \\
D^2 p r + \alpha \gamma &= - a^2 \mathfrak{c}^2 \mathfrak{X} (\mathfrak{k} + \mathfrak{h}) (1 + \mathfrak{t}), \\
\beta \sqrt{D^2 s^2 - \delta^2} &= a^2 \mathfrak{c}^2 \mathfrak{X}^2 \frac{\mathfrak{k}}{n} \sqrt{1 + \mathfrak{u}}, \\
D^2 r^2 - \alpha^2 - \beta^2 &= a^2 \mathfrak{c}^2 (1 + \mathfrak{w}).
\end{aligned}$$

Durch diese Werthe geben die Ausdrücke (h) von Nro. 1.

$$\begin{aligned}
E &= - a^2 \mathfrak{c}^2 \mathfrak{X} (\mathfrak{k} + \mathfrak{h}) (1 + \mathfrak{t}) - \frac{\mathfrak{k}}{n} \sqrt{1 + \mathfrak{u}}, \\
G &= a^2 \mathfrak{c}^2 (1 + \mathfrak{w}).
\end{aligned}$$

Bemerkt man ferner, daſs

$$\mathfrak{e} = 0$$

ist, so erhält man aus der Gleichung (i) von Nro. 1.

$$\frac{1}{\mathfrak{g} - \mathfrak{Z}} = - \frac{E}{G \mathfrak{X}};$$

oder, wenn man die vorhergehenden Werthe substituirt,

$$\frac{1}{\mathfrak{g} - \mathfrak{Z}} = \frac{(\mathfrak{k} + \mathfrak{h}) (1 + \mathfrak{t}) - \frac{\mathfrak{k}}{n} \sqrt{1 + \mathfrak{u}}}{1 + \mathfrak{w}}.$$

Dieser Ausdruck, verbunden mit der Gleichung (a),

dient zur Bestimmung von $\mathfrak{g}$ unter der Voraussetzung, dafs die Werthe von $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ bekannt sind.

Wenn die Coordinaten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{b}$ so klein sind, dafs man sich erlauben kann, sie in dem vorhergehenden Ausdrucke zu vernachlässigen, so gibt derselbe

$$\frac{1}{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{f} + \mathfrak{h}) - \frac{\mathfrak{f}}{n}.$$

Da nun jene Coordinaten gewöhnlich sehr klein sind, ohne jedoch ganz vernachlässigt werden zu können, so ist es für die Ausübung bequem, den Ausdruck von $\frac{1}{\mathfrak{g} - \mathfrak{z}}$ so umzuändern, dafs er unmittelbar $\frac{1}{\mathfrak{g}}$ gibt und aus zwei Theilen besteht, von welchen der erste der genäherte Werth ist, der zweite dagegen eine kleine von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{b}$ abhängige Correction enthält. Nimmt man hiernach für $\frac{1}{\mathfrak{g}}$ den folgenden Ausdruck an:

$$\frac{1}{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{f} + \mathfrak{h}) - \frac{\mathfrak{f}}{n} + \mathfrak{G}, \quad . \; . \; . \quad \text{(c)}$$

so ist $\mathfrak{G}$ die unbekannte Correction, auf deren Bestimmung es ankommt. Die Differenz der vorhergehenden Ausdrücke von $\frac{1}{\mathfrak{g} - \mathfrak{z}}$ und $\frac{1}{\mathfrak{g}}$ ist

$$\frac{1}{\mathfrak{g} - \mathfrak{z}} - \frac{1}{\mathfrak{g}} = \frac{(\mathfrak{f} + \mathfrak{h})(\mathfrak{t} - \mathfrak{w}) - \frac{\mathfrak{f}}{n}(\sqrt{1 + \mathfrak{u}} - 1 - \mathfrak{w})}{1 + \mathfrak{w}} - \mathfrak{G}.$$

Substituirt man hierin die identischen Werthe

$$\frac{1}{\mathfrak{g} - \mathfrak{z}} - \frac{1}{\mathfrak{g}} = \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{g}(\mathfrak{g} - \mathfrak{z})},$$

$$\sqrt{1 + \mathfrak{u}} - 1 = \frac{\mathfrak{u}}{1 + \sqrt{1 + \mathfrak{u}}},$$

so erhält man

$$\mathfrak{G} = \left(\frac{1}{1 + \mathfrak{w}}\right)\Big[(\mathfrak{f} + \mathfrak{h})(\mathfrak{t} - \mathfrak{w})$$
$$- \frac{\mathfrak{f}}{n}\left(\frac{\mathfrak{u}}{1 + \sqrt{1 + \mathfrak{u}}} - \mathfrak{w}\right)\Big] - \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{g}(\mathfrak{g} - \mathfrak{z})}. \quad \text{(d)}$$

Dieser Ausdruck von $\mathfrak{G}$ ist sehr bequem, um $\frac{1}{\mathfrak{g}}$ durch successive Näherungen zu berechnen, wodurch die eine Coordinate des willkürlichen Punctes bestimmt wird. Die andere Coordinate $\mathfrak{f}$ erhält man aus der Gleichung (k) von Nro. 1., wenn man darin statt α, β, γ die ersten vorhergehenden Werthe substituirt, nämlich

$$\alpha = -\frac{1}{n}[(\mathfrak{c}-a)\mathfrak{Y} + \mathfrak{b}(a-\mathfrak{Z})],$$

$$\beta = \frac{(\mathfrak{c}-a)\mathfrak{X}}{n},$$

$$\gamma = -\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{X}}{n}.$$

Dieses gibt

$$\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{b}(\mathfrak{g}-a)}{(\mathfrak{c}-a)},$$

und folglich

$$\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}} = \frac{\mathfrak{b}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\mathfrak{g}}\right)}{\mathfrak{c}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\mathfrak{c}}\right)}.$$

Substituirt man in dieser Formel die oben gegebenen Werthe

$$\frac{1}{a} = \mathfrak{k} + \mathfrak{h},$$

$$\frac{1}{\mathfrak{g}} = \mathfrak{k} + \mathfrak{h} - \frac{\mathfrak{k}}{n} + \mathfrak{G},$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{\mathfrak{c}} = \mathfrak{k},$$

so wird sie

$$\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}} = \frac{\mathfrak{b}}{n\mathfrak{c}}\left[1 - \frac{n\mathfrak{G}}{\mathfrak{k}}\right] \quad \ldots \ldots \quad \text{(e)}$$

Endlich erhält man aus der Gleichung (l) von Nro. 1. die Gleichungen für die Projectionen des gebrochenen Strahles auf den Ebenen der yz und der zx, nämlich

$$\left.\begin{aligned} y &= \mathfrak{f} - \frac{(\mathfrak{Y}-\mathfrak{f})(z-\mathfrak{g})}{\mathfrak{g}-\mathfrak{z}}, \\ x &= -\frac{\mathfrak{X}(z-\mathfrak{g})}{\mathfrak{g}-\mathfrak{z}}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (\mathrm{f})$$

Bei dem Übergange zu der folgenden brechenden Fläche muſs man sich erinnern, daſs sich bei derselben der Ursprung der Coordinaten nach der oben gemachten Voraussetzung abändert, indem er in denjenigen Punct verlegt wurde, wo die folgende Fläche in die Axe der z einschneidet.

Nennt man daher

d den zwischen beiden Flächen liegenden Theil der Axe, so muſs man $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{z}+d$ und $\mathfrak{g}+d$ verwechseln, wenn man die Formeln (m) und (n) von Nro 1. gebrauchen will, in welchen einerlei Ursprung für beide Flächen vorausgesetzt ist. Hierdurch geben jene Formeln

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{b}_{,} &= \mathfrak{f}, \\ \mathfrak{c}_{,} &= \mathfrak{g} + d, \\ \mathfrak{Y}_{,} &= \mathfrak{f} + \frac{(\mathfrak{Y}-\mathfrak{f})(\mathfrak{g}+d-\mathfrak{z}_{,})}{\mathfrak{g}-\mathfrak{z}}, \\ \mathfrak{X}_{,} &= \frac{\mathfrak{X}(\mathfrak{g}+d-\mathfrak{z}_{,})}{\mathfrak{g}-\mathfrak{z}}, \\ \mathfrak{X}_{,}^{2} &+ \mathfrak{Y}_{,}^{2} + (a_{,}-\mathfrak{z}_{,})^{2} - a_{,}^{2} = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (\mathrm{g})$$

Der Ausdruck (e), auf die folgende Fläche bezogen, gibt

$$\frac{\mathfrak{f}_{,}}{\mathfrak{g}_{,}} = \frac{\mathfrak{b}_{,}}{n_{,}\,\mathfrak{c}_{,}}\left[1 - \frac{n_{,}\,\mathfrak{G}_{,}}{\mathfrak{k}_{,}}\right].$$

Substituirt man hierin statt $\mathfrak{b}_{,}$ seinen Werth aus der ersten Gleichung (g), so erhält man

$$\frac{\mathfrak{f}_{,}}{\mathfrak{g}_{,}} = \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}} \cdot \frac{\mathfrak{g}}{n_{,}\,\mathfrak{c}_{,}}\left[1 - \frac{n_{,}\,\mathfrak{G}_{,}}{\mathfrak{k}_{,}}\right]. \quad . \; . \; . \quad (\mathrm{h})$$

Die vorhergehenden Gleichungen reichen hin, die Werthe von $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{z}$ für alle brechende Flächen zu berechnen, wenn für die erste derselben $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ als bekannt angenommen werden.

Nach der schon oben gemachten Bemerkung kann man jene Gleichungen als endliche Differenzengleichungen zwischen den unbekannten Gröſsen betrachten, weil man dadurch die Werthe derselben für eine beliebige Fläche findet, wenn sie für die vorhergehende als bekannt vorausgesetzt werden. Die Integration führt folglich willkürliche Constanten ein, welche durch gegebene Werthe der veränderlichen Gröſsen bestimmt werden müssen, und diese Bestimmung wird in manchen Fällen erleichtert, wenn man voraussetzen darf, daſs die endlichen Differenzengleichungen auch auf die erste brechende Fläche anwendbar sind. Hierzu braucht man nur anzunehmen, daſs die Lichtstrahlen, ehe sie jene treffen, durch eine eingebildete Fläche gegangen seyen, welche mit ihr zusammenfiele und keine brechende Kraft ausübte. Bei dieser Voraussetzung hat man, wenn die Buchstaben, welche sich auf die eingebildete Fläche beziehen, mit dem unteren Index o, diejenigen dagegen, welche der ersten brechenden Fläche angehören, mit dem Index 1 unterschieden werden,

$$\left.\begin{array}{r@{\;=\;}l} a_0 & a_1, \\ d_0 & 0, \\ \mathfrak{f}_0 & \mathfrak{b}_1, \\ \mathfrak{g}_0 & \mathfrak{c}_1, \\ \mathfrak{X}_0 & \mathfrak{X}_1, \\ \mathfrak{Y}_0 & \mathfrak{Y}_1, \\ \mathfrak{Z}_0 & \mathfrak{Z}_1, \\ n_0 & 1, \end{array}\right| \quad \cdots\cdots\cdots \quad \text{(i)}$$

wodurch den Gleichungen (g) und (h) in Bezug auf die erste brechende Fläche Genüge geleistet wird. Man kann daher die mit dem Index o versehenen Gröſsen wie gegebene Werthe der Veränderlichen gebrauchen.

Es bleibt jetzt nur noch übrig, die vorhergehenden endlichen Differenzengleichungen zu integriren; da

sie aber zu complicirt sind, als dafs ihre genaue Integration möglich wäre, so werde ich sie in Reihen entwickeln, welche nach steigenden Potenzen der Coordinaten 𝔛, 𝔜, 𝔟 und 𝔣 geordnet sind. Die Glieder dieser Reihen werde ich so in Ordnungen abtheilen, dafs die Ordnungszahl jedes Mal die Stelle angibt, welche das Glied in der Reihe einnimmt. Hiernach besteht die erste Ordnung aus den ersten Gliedern sämmtlicher Reihen, die zweite Ordnung aus den zweiten Gliedern, u. s. w., die Exponenten aber wachsen jedes Mal um zwei Einheiten, wenn man in derselben Reihe von einer Ordnung zur folgenden übergeht. Durch diese Entwickelung werden die endlichen Differenzengleichungen linearisch, und steigen nur höchstens bis zur zweiten Ordnung. Mit der Integration solcher Gleichungen hat sich zwar bereits *Lagrange* in seiner Abhandlung über die Fernröhre, welche in den neuen Mémoiren von Berlin, Jahrgang 1778, pag. 162 abgedruckt ist, beschäftiget, da er jedoch nur einen speciellen Fall betrachtet, so wird es nicht undienlich seyn, die allgemeinen Formeln hierher zu setzen, zumal da ihre Entwickelung nur wenigen Raum erfordert. Ich werde mich dabei zur Abkürzung einer Bezeichnungsart bedienen, welche derjenigen ähnlich ist, die *Fourier* bei den Integralen der Differenzialformeln gebraucht hat, indem ich nämlich durch das Zeichen

$$\Sigma_{\alpha}^{\beta}\, u_m$$

die Summe aller Glieder bezeichne, welche entstehen, wenn man dem Index m alle Werthe von $m = \alpha$ bis $m = \beta$ einschliefslich gibt. Enthält die Gröfse u_m, wie es bisweilen geschieht, mehr als einen Index, so werde ich denjenigen, auf welchen sich die Summation bezieht, unter das Zeichen Σ setzen. Aufserdem werde ich dem

Zeichen $[u_i]^m$

die in der Differenzenrechnung angenommene Bedeutung geben, wornach es das Product von m Factoren
$u_i\, u_{i-1}\, u_{i-2}\, .\; .\; .\; u_{i-(m-1)}$ darstellt.

Integration der endlichen Differenzengleichung vom ersten Grade und der zweiten Ordnung.

3) Ich betrachte zuerst die endliche Differenzengleichung

$$u_i = p_{i-1}\left[u_{i-1} + q_{i-2}\, u_{i-2}\right], \quad . \quad . \quad \text{(a)}$$

und setze voraus, daſs die Gröſsen u_i an die Bedingungen geknüpft sind:

$$\left.\begin{array}{l} u_0 = o \\ u_1 = c \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(b)}$$

Setzt man in der Gleichung (a)

$$u_i = c\, U_i, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(c)}$$

so verwandelt sich dieselbe in folgende:

$$U_i = p_{i-1}\left[U_{i-1} + q_{i-2}\, U_{i-2}\right], \quad . \quad . \quad \text{(d)}$$

und die Bedingungen (b) geben

$$U_0 = o,$$
$$U_1 = 1.$$

Formirt man nun nach der Gleichung (d) die verschiedenen Werthe von U_2, U_3 u. s. w., so erhält man durch fortgesetzte Substitutionen die folgenden Werthe dieser Gröſsen:

$$U_2 = p_1,$$
$$U_3 = p_2 p_1 + p_2 q_1,$$
$$U_4 = p_3 p_2 p_1 + p_3 p_2 q_1 + p_3 q_2 p_1,$$
$$U_5 = p_4 p_3 p_2 p_1 + p_4 p_3 p_2 q_1$$
$$+ p_4 p_3 q_2 p_1 + p_4 q_3 p_2 p_1$$
$$+ p_4 q_3 p_2 q_1,$$

u. s. w.

Das Gesetz dieser Ausdrücke ist schon so evident, dafs es unnöthig ist, die Entwickelung weiter fortzusetzen.

Man sieht in der That, dafs U_i aus mehreren Producten besteht, deren jedes $i-1$ Factoren enthält. Um diese Producte zu formiren, braucht man anfänglich nur das erste zu schreiben, welches ist:

$$p_{i-1}\, p_{i-2} \,.\,.\,.\, p_1 = [p_{i-1}]^{i-1}.$$

In demselben verwechselt man hierauf zuerst ein p, dann zwei p u. s. w. mit q, indem man den q alle mögliche Stellen gibt und diese Verwechselung so weit fortsetzt, als es geschehen kann, mit der einzigen Bedingung, nur diejenigen Producte beizubehalten, in welchen vor jedem q unmittelbar ein p vorhergeht. U_i ist sodann die Summe von sämmtlichen hierdurch erhaltenen Producten.

Die Gleichung (d) zeigt, dafs das gefundene Gesetz für U_i richtig ist, wenn es für U_{i-1} und U_{i-2} als richtig angenommen wird. Nach dieser Voraussetztung enthält nämlich $p_{i-1}\, U_{i-1}$ alle nach jenem Gesetze gebildeten Producte von $i-1$ Factoren, in welchen q_{i-2} nicht vorkommt, $p_{i-1}\, q_{i-2}\, U_{i-2}$ dagegen alle diejenigen, von welchen q_{i-2} ein Factor ist, wodurch die Allgemeinheit jenes Gesetzes bewiesen wird.

Nachdem U_i auf diese Art gefunden ist, so ist der Ausdruck (c) das Integral der Gleichung (a).

Hat man statt der Bedingungen (b) die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} u_k &= 0, \\ u_{k+1} &= c, \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad \text{(e)}$$

und man formirt nach der Gleichung (a) den Ausdruck von u_{k+i}, so wird derselbe

$$u_{k+i} = p_{k+i-1}\,[u_{k+i-1} + q_{k+i-2}\, u_{k+i-2}]. \quad \text{(f)}$$

Die Gleichungen (f) und (e) stimmen mit denen, (a) und (b), überein, wenn man jeden Index, welcher

in den letzteren vorkommt, um dieselbe Gröfse k vermehrt. Bezeichnet man daher durch U_i^k dasjenige, in was sich U_i durch diese Veränderung des Index verwandelt, so ist das Integral der Gleichung (f) oder (a):

$$u_{k+i} = c\, U_i^k,$$

oder wenn man $i-k$ statt i nimmt,

$$u_i = c\, U_{i-k}^k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (g)$$

Dieser Ausdruck enthält als besonderen Fall das Integral (c), welches daraus entsteht, wenn man $k=o$ setzt. Da übrigens das Integral (g) von den Bedingungen (e) abhängt, so ist es nicht das vollständige Integral der Gleichung (a), es reicht aber für den gegenwärtigen Zweck hin.

Ich gehe nun zum allgemeinen Fall über, und betrachte die Gleichung

$$u_i = p_{i-1}\left[u_{i-1} + q_{i-2}\, u_{i-2}\right] + r_{i-1}, \quad . \quad (h)$$

wobei u_i keiner Bedingung unterworfen ist.

Nimmt man die Werthe von u_0 und u_1 als gegeben an, und formirt nach der Gleichung (h) die Ausdrücke von u_2, u_3 u. s. w. bis u_i, so erhält man daraus durch fortgesetzte Substitutionen den Werth von u_i, durch u_0 und u_1 ausgedrückt; und da die Gleichung (h) linearisch ist, so kann dieser Werth nur die Gestalt haben:

$$u_i = P_i u_1 + Q_i u_0 + R_i, \quad . \; . \; . \quad (i)$$

Man hat eben so

$$u_{i-1} = P_{i-1} u_1 + Q_{i-1} u_0 + R_{i-1},$$
$$u_{i-2} = P_{i-2} u_1 + Q_{i-2} u_0 + R_{i-2}.$$

Durch Substitution dieser Werthe erhält man aus der Gleichung (h)

$$\begin{aligned} u_i = {} & p_{i-1}(P_{i-1} + q_{i-2} P_{i-2})\, u_1 \\ & + p_{i-1}(Q_{i-1} + q_{i-2} Q_{i-2})\, u_0 \\ & + p_{i-1}(R_{i-1} + q_{i-2} R_{i-2}) + r_{i-1}. \end{aligned}$$

Die Vergleichung hiervon mit dem Ausdrucke (i) gibt

$$\left.\begin{aligned} P_i &= p_{i-1}(P_{i-1} + q_{i-2}\,P_{i-2}), \\ Q_i &= p_{i-1}(Q_{i-1} + q_{i-2}\,Q_{i-2}), \\ R_i &= p_{i-1}(R_{i-1} + q_{i-2}\,R_{i-2}) + r_{i-1}. \end{aligned}\right\} \quad . \; (k)$$

Setzt man nun in der Gleichung (i) zuerst $i = 0$, dann $i = 1$, so erhält man

$$P_0 = 0; \quad Q_0 = 1; \quad R_0 = 0.$$
$$P_1 = 1; \quad Q_1 = 0; \quad R_1 = 0.$$

Durch diese Werthe gibt die zweite Gleichung (k)

$$Q_2 = p_1\,q_0.$$

Vergleicht man die beiden ersten Gleichungen (k) und die vorhergehenden Werthe von P_0, P_1, Q_1 und Q_2 mit den Ausdrücken (a) und (e), so sieht man, daſs sie mit letzteren übereinstimmen, wenn man darin ein Mal

$$u = P; \quad k = 0; \quad c = 1,$$

und dann

$$u = Q; \quad k = 1; \quad c = p_1\,q_0$$

setzt. Vermittelst dieser Werthe gibt daher das Integral (g)

$$\left.\begin{aligned} P_i &= U_i, \\ Q_i &= p_1\,q_0\,U'_{i-1}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (l)$$

Es bleibt jetzt noch übrig, R_i zu finden. Die Gleichung (h) zeigt, daſs R_i nur eine linearische Function der verschiedenen mit r bezeichneten Gröſsen seyn kann, und daſs eine beliebige von ihnen, z. B. r_m, zum ersten Male in dem Ausdrucke von R_{m+1} vorkommt, in welchem ihr Coefficient die Einheit ist. Denkt man sich daher R_i in einen nach r geordneten Ausdruck entwickelt, und bezeichnet den Coefficienten von r_m in demselben durch $S_i^{(m)}$, so kann jener Ausdruck nur die Gestalt haben:

$$\left.\begin{aligned} R_i &= S_i^{(1)} r_1 \ldots + S_i^{(m)} r_m \ldots + S_i^{(i-1)} r_{i-1} \\ &= \sum_m {}_1^{(i-1)} S_i^{(m)} r_m, \end{aligned}\right\} \text{(m)}$$

und es ist $S_i^{(m)} = 0$ für alle Werthe von i, von $i = 0$ bis zu $i = m$, dagegen ist $S_i^{(m)} = 1$ für $i = m + 1$, so daſs man hat

$$S_m^{(m)} = 0,$$

$$S_{m+1}^{(m)} = 1.$$

Formirt man nun nach dem Ausdrucke (m) die Werthe von R_{i-1} und R_{i-2}, und substituirt sie eben so wie den von R_i in der letzten Gleichung (k), so erhält man durch die Vergleichung der mit r_m multiplicirten Glieder

$$S_i^{(m)} = p_{i-1}(S_{i-1}^{(m)} + q_{i-2} S_{i-2}^{(m)}).$$

Die vorhergehenden Ausdrücke stimmen mit denen (e) und (a) überein, wenn man setzt

$$u = S^{(m)};\quad k = m;\quad c = 1.$$

Das Integral (g) gibt daher

$$S_i^{(m)} = U_{i-m}^m.$$

Durch Substitution dieses Werthes erhält man endlich aus (m)

$$R_i = \sum_m {}_1^{(i-1)} U_{i-m}^m r_m \quad \ldots\ldots \quad \text{(n)}$$

Die Formeln (i), (l) und (n) enthalten das vollständige Integral der gegebenen Differenzengleichung vom ersten Grade und der zweiten Ordnung (h), die Grössen u_1 und u_0 vertreten dabei die Stelle der beiden willkürlichen Constanten, welche die Ordnung der Gleichung erfordert.

Substituirt man in dem Ausdrucke (i) die Werthe von P_i, Q_i und R_i, so wird jenes Integral

$$u_i = U_i u_1 + U_{i-1}^1 p_1 q_0 u_0 + \sum_m {}_1^{(i-1)} U_{i-m}^m r_m, \quad \text{(o)}$$

worin man die Gröſsen u_1 und $p_1 q_0 u_0$ durch zwei willkürliche Constanten ersetzen kann.

Durch die Annahme $q = o$ verwandelt sich die gegebene Gleichung (h) in die endliche Differenzengleichung vom ersten Grade und der ersten Ordnung:

$$u_i = p_{i-1} u_{i-1} + r_{i-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (p)$$

In diesem Falle hat man

$$U_i = [p_{i-1}]^{i-1},$$

$$U^m_{i-m} = [p_{i-1}]^{i-m-1} = \frac{[p_{i-1}]^{i-1}}{[p_m]^m},$$

folglich wird das Integral (o)

$$u_i = [p_{i-1}]^{i-1} \left\{ u_1 + \Sigma_1^{(i-1)} \frac{r_m}{[p_m]^m} \right\}$$

$$= [p_{i-1}]^{i-1} \left\{ u_1 + \underset{m}{\Sigma_2^i} \frac{r_{m-1}}{[p_{m-1}]^{m-1}} \right\}, \quad . \quad . \quad . \quad (q)$$

oder, wenn man u_0 als willkürliche Constante betrachtet, und bemerkt, daſs die Gleichung (p)

$$u_1 = p_0 u_0 + r_0$$

gibt,

$$u_i = [p_{i-1}]^i \left\{ u_0 + \underset{m}{\Sigma_0^{(i-1)}} \frac{r_m}{[p_m]^{m+1}} \right\}$$

$$= [p_{i-1}]^{i-1} \left\{ p_0 u_0 + \underset{m}{\Sigma_1^i} \frac{r_{m-1}}{[p_{m-1}]^{m-1}} \right\}, \quad . \quad . \quad . \quad (r)$$

welches mit dem bekannten Werthe dieses Integrals übereinstimmt.

Enthält die Gröſse r_{i-1} ein Glied, welches mit dem Zeichen Σ versehen ist, so daſs die Gleichung (p) die Gestalt hat:

$$u_i = p_{i-1} u_{i-1} + r_{i-1} + s_{i-1} \Sigma_1^{(i-1)} t_\mu, \quad . \quad (s)$$

so wird ihr Integral

$$u_i = [p_{i-1}]^{i-1} \left\{ \begin{aligned} & u_1 + \Sigma_1^{(i-1)} \frac{r_m}{[p_m]^m} \\ & \quad + \Sigma_{1\,m}^{(i-1)} \frac{s_m}{[p_m]^m} \Sigma_1^m t_\mu . \end{aligned} \right\} \text{(t)}$$

In manchen Fällen ist es besser, die Ordnung der beiden Integrationen umzukehren, welche in dem letzten Gliede enthalten sind. Zu diesem Ende hat man, wenn man statt $\frac{s_m}{[p_m]^m}$ den Buchstaben q_m setzt,

$$\Sigma_{1\,m}^{(i-1)} q_m \Sigma_1^m t_\mu = \Sigma_{1\,m}^{(i-1)} q_m [t_1 + t_2 \ldots + t_m] =$$

$$\begin{aligned} &= q_1 t_1 \\ &+ q_2 (t_1 + t_2) \\ &+ \ldots\ldots \\ &+ q_m (t_1 + t_2 \ldots + t_m) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ q_{i-1} (t_1 + t_2 \ldots + t_{i-1}) \\ &= t_1 (q_1 \ldots + q_{i-1}) + t_2 (q_2 \ldots + q_{i-1}) \ldots \\ &\quad \ldots + t_m (q_m \ldots + q_{i-1}) \ldots + t_{i-1} q_{i-1} \\ &= \Sigma_{1\,m}^{(i-1)} t_m \Sigma_m^{(i-1)} q_\mu = \Sigma_{1\,m}^{(i-1)} t_m \Sigma_m^{(i-1)} \frac{s_\mu}{[p_\mu]^\mu} . \end{aligned}$$

Hierdurch nimmt das Integral (t) die Gestalt an

$$u_i = [p_{i-1}]^{i-1} \left\{ \begin{aligned} & u_1 + \Sigma_1^{(i-1)} \frac{r_m}{[p_m]^m} \\ & \quad + \Sigma_{1\,m}^{(i-1)} t_m \Sigma_m^{(i-1)} \frac{s_\mu}{[p_\mu]^\mu} \end{aligned} \right\} . \text{(u)}$$

Glieder der ersten Ordnung, oder optische Formeln mit Vernachlässigung der Abweichungen.

4) Nach der am Ende von Nro. 2. gegebenen Definition sind die Glieder der ersten Ordnung diejenigen Werthe, welche man erhält, wenn man die genauen

Ausdrücke in Reihen entwickelt, die nach steigenden Potenzen der Coordinaten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{f}$ geordnet sind, und in jeder Reihe nur das mit der niedrigsten Potenz derselben multiplicirte Glied beibehält. Werden jene Coordinaten als klein vorausgesetzt, so sind die Reihen convergirend, und die Glieder der ersten Ordnung enthalten genäherte Auflösungen, welche in vielen Fällen hinreichen; es ist daher vor Allem nöthig, sich damit zu beschäftigen. Ich werde mich allgemein der lateinischen Buchstaben bedienen, um die Gröfsen der ersten Ordnung zu bezeichnen, die denjenigen correspondiren, für welche in Nro. 2. deutsche Buchstaben gebraucht worden sind. Treibt man daher die Näherung nicht weiter, so mufs man die letzteren Buchstaben mit den ersteren verwechseln, und da die Gleichungen (a) und (d) von Nro. 2. zeigen, dafs die Gröfsen $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{S}$ von der Ordnung $\mathfrak{X}^2$ oder $\mathfrak{b}^2$ sind, so müssen sie gegen die Coordinaten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{f}$ und die davon unabhängigen Glieder vernachlässigt werden. Hiernach geben die Formeln von Nro. 2.:

$$\left.\begin{aligned}
h &= \frac{1}{c},\\
k &= \frac{1}{a} - \frac{1}{c},\\
\frac{1}{g} &= (k+h) - \frac{k}{n} = \frac{n-1}{na} + \frac{1}{nc},\\
\frac{f_{,}}{g_{,}} &= \frac{b_{,}}{n_{,}c_{,}} = \frac{f}{g}\cdot\frac{g}{n_{,}c_{,}},\\
b_{,} &= f,\\
c_{,} &= g + d,\\
Y_{,} &= f + (Y-f)\left(\frac{g+d}{g}\right) = Y\left(\frac{g+d}{g}\right) - \frac{fd}{g}\\
X_{,} &= X\left(\frac{g+d}{g}\right),\\
Z &= \frac{X^2+Y^2}{2a}.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}$$

$$\left.\begin{aligned} y &= f - (Y - f)\left(\frac{z-g}{g}\right) = -Y\left(\frac{z-g}{g}\right) + \frac{zf}{g} \\ x &= -X\left(\frac{z-g}{g}\right). \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Um diese Formeln zu integriren, betrachte ich zuerst die sechste und die dritte. Bezieht man sie auf die i^{te} Fläche, so werden sie

$$\left.\begin{aligned} c_i &= g_{i-1} + d_{i-1}, \\ \frac{1}{g_i} &= \left(\frac{n-1}{n}\right)_i \frac{1}{a_i} + \frac{1}{n_i c_i}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (b)$$

Statt c und g führe ich eine Reihe von veränderlichen Gröſsen u_0, u_1 u. s. w. bis u_{2i} ein, und setze

$$\left.\begin{aligned} c_i &= \frac{u_{2i-1}}{u_{2i-2}}, \\ g_i &= \frac{u_{2i-1}}{u_{2i}}. \end{aligned}\right| \quad \ldots \ldots \ldots \quad (c)$$

Durch Substitution dieser Werthe nehmen die Gleichungen (b) die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} u_{2i-1} &= d_{i-1}\, u_{2i-2} + u_{2i-3}, \\ u_{2i} &= \left(\frac{n-1}{na}\right)_i u_{2i-1} + \frac{1}{n_i} u_{2i-2}, \end{aligned}\right\} \quad . \quad (d)$$

und sie stimmen mit der Gleichung (h) von Nro. 3. überein, wenn man setzt:

$$\left.\begin{aligned} p_{2i-2} &= d_{i-1}, \\ p_{2i-1} &= \left(\frac{n-1}{na}\right)_i, \\ q_{2i-3} &= \frac{1}{d_{i-1}}, \\ q_{2i-2} &= \left(\frac{a}{n-1}\right)_i, \\ r_{2i-2} &= r_{2i-1} = 0. \end{aligned}\right| \quad \ldots \ldots \quad (e)$$

Mit Berücksichtigung dieser Werthe ist der Ausdruck (o) von Nro. 3. das Integral der Gleichungen (d),

wenn man die Constanten u_1 und u_0 auf eine schickliche Weise bestimmt. Zu diesem Ende erhält man aus (c) und (e), wenn man darin $i = 1$ setzt,

$$c_1 = \frac{u_1}{u_0},$$

$$p_1 = \left(\frac{n-1}{n a}\right)_1,$$

$$q_0 = \left(\frac{a}{n-1}\right)_1,$$

und hieraus

$$p_1 \, q_0 \, u_0 = \frac{u_1}{n_1 \, c_1};$$

u_1 bleibt unbestimmt, und da es aus dem Endresultate wegfällt, so kann man, ohne der Allgemeinheit zu schaden, dafür die Einheit nehmen. Hierdurch wird die Formel (o) von Nro. 3.:

$$u_i = U_i + \frac{1}{n_1 \, c_1} \, U'_{i-1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(f)}$$

worin man nach und nach i in $2i-2$, $2i-1$ und $2i$ umändern mufs, um c_i und g_i vermittelst der Ausdrücke (c) zu erhalten.

Die vorhergehenden Resultate sind denen analog, welche *Lagrange* in der oben angeführten Abhandlung für ein System von Linsengläsern gefunden hat.

Da man übrigens in der Ausübung gewöhnlich die Werthe von c und g für alle brechende Flächen zu kennen nöthig hat, so ist es einfacher, sich hierzu unmittelbar der Formeln (b) zu bedienen, indem man sie abwechselnd gebraucht, und dem Index i nach und nach alle Werthe von $i = 1$ bis zu $i = i$ gibt.

Ich gehe nun zur vierten Gleichung (a). Auf die i^{te} Fläche bezogen wird sie

$$\frac{f_i}{g_i} = \frac{b_i}{n_i \, c_i} = \frac{g_{i-1}}{n_i \, c_i} \, \frac{f_{i-1}}{g_{i-1}}.$$

Das Integral hiervon, nach der Formel (r) von Nro. 3. genommen, ist

$$\frac{f_i}{g_i} = \frac{b_i}{n_i\, c_i} = \frac{1}{[n_i]^i} \left[\frac{g_{i-1}}{c_i}\right]^{i-1} \frac{g_0}{c_1} \frac{f_0}{g_0},$$

folglich, wenn man statt $\frac{g_0}{c_1} \frac{f_0}{g_0}$ seinen Werth $\frac{b_1}{c_1}$ substituirt, welchen die Ausdrücke (i) von Nro. 2. geben,

$$\frac{f_i}{g_i} = \frac{b_i}{n_i\, c_i} = \frac{1}{[n_i]^i} \left[\frac{g_{i-1}}{c_i}\right]^{i-1} \frac{b_1}{c_1}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} \varphi_i &= n_i\, n_{i-1} \ldots n_1 = [n_i]^i, \\ V_i &= \frac{g_{i-1}}{c_i} \frac{g_{i-2}}{c_{i-1}} \ldots \frac{g_1}{c_2} = \left[\frac{g_{i-1}}{c_i}\right]^{i-1}, \\ \varphi_1 &= \frac{b_1}{c_1}, \end{aligned}\right\} \quad (g)$$

so ist

φ_i das Brechungsverhältniſs unter der Voraussetzung, daſs der Lichtstrahl unmittelbar in das i^{te} durchsichtige Mittel dringt, ohne die vorhergehenden zu durchlaufen;

V_i die durch das Instrument hervorgebrachte Vergrösserung, wenn man darauf keine Rücksicht nimmt, daſs die Gegenstände bei dem Gebrauche desselben in eine andere Entfernung als bei der Betrachtung mit dem bloſsen Auge gehalten werden müssen;

φ_1 die Tangente des halben Gesichtsfeldes in dem Falle, daſs der leuchtende Punct an der Grenze desselben liegt.

Durch diese Werthe nimmt der vorhergehende Ausdruck von $\frac{f_i}{g_i}$ die Gestalt an:

$$\frac{f_i}{g_i} = \frac{b_i}{n_i\, c_i} = \frac{V_i\, \varphi_1}{\varphi_i} \quad \ldots \ldots \quad (h)$$

Hierbei mufs bemerkt werden, dafs man, um diese Formel auf die erste brechende Fläche anwenden zu können,

$$V_1 = 1$$

setzen mufs, denn hieraus folgt

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{\varphi_1}{\nu_1} = \frac{b_1}{n_1 c_1}.$$

Endlich geben die siebente und die achte Gleichung (a), wenn man darin statt $g + d$ und $\frac{f}{g}$ ihre Werthe substituirt,

$$Y_i = \frac{c_i}{g_{i-1}} Y_{i-1} - \frac{V_{i-1} d_{i-1}}{\nu_{i-1}} \varphi_1,$$

$$X_i = \frac{c_i}{g_{i-1}} X_{i-1};$$

folglich, wenn man nach der Formel (q) von Nro. 3. integrirt, und zur Abkürzung

$$K^{(m)} = -\frac{V_{m-1} V_m d_{m-1}}{\nu_{m-1}},$$

$$K_i = \Sigma_{2\,m}^{i} K^{(m)}$$

setzt,

$$Y_i = \frac{1}{V_i}[Y_1 + K_i \varphi_1],$$

$$X_i = \frac{1}{V_i} X_1.$$

Die erste dieser Formeln zeigt, dafs man $K_1 = 0$ setzen mufs, damit der Werth von Y_1 darin begriffen ist.

Für die folgenden Untersuchungen ist es jedoch vortheilhaft, die Bezeichnungen so abzuändern, dafs der Ausdruck von Y_1 dieselbe Gestalt hat wie der von Y_i. Hierzu ist weiter nichts erforderlich, als den Ursprung der Y_1 in denjenigen Punct zu verlegen, dessen Ordinate

$$Y_1 = K_1 \varphi_1$$

ist, wobei K_1 eine willkürliche Constante bezeichnet.

Versieht man nun Y_1, wenn es auf diesen neuen Ursprung bezogen wird, mit einem Accente, so ist

$$Y_1 = Y'_1 + K_1 \varphi_1,$$

und die vorhergehenden Formeln nehmen die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} K^{(m)} &= -\frac{V_{m-1} V_m d_{m-1}}{\varrho_{m-1}}, \\ K_i &= K_1 + \Sigma_2^i{}_m K^{(m)}, \\ Y_i &= \frac{1}{V_i}\left[Y'_1 + K_i \varphi_1\right], \\ X_i &= \frac{X_1}{V_i}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

Hierdurch gibt die neunte Gleichung (a)

$$Z_i = \frac{X_1^2 + (Y'_1 + K_i \varphi_1)^2}{2 a_i V_i^2} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(k)}$$

Da auf diese Art die Gröſsen g_i, f_i, X_i, Y_i und Z_i bestimmt sind, so sind die beiden letzten Gleichungen (a), auf die i^{te} Fläche bezogen, diejenigen, welche den Projectionen des gebrochenen Strahles auf den Ebenen der yz und der zx zugehören. Setzt man in diesen Gleichungen $z_i = g_i$, so geben sie

$$y_i = f_i,$$
$$x_i = 0,$$

und da diese Werthe von Y_1 und X_1 unabhängig sind, so folgt daraus, daſs sich alle Strahlen, welche von demselben leuchtenden Puncte ausgehen, in demjenigen Puncte schneiden, dessen Coordinaten

$$x_i = 0,$$
$$y_i = f_i,$$
$$z_i = g_i$$

sind. Dieser Vereinigungspunct ist daher das Bild des leuchtenden Punctes, wenn man nur die Gröſsen der

ersten Ordnung berücksichtigt. Eben so haben sich die Strahlen, ehe sie auf die i^{te} Fläche fielen, in dem der $(i-1)^{ten}$ Fläche zugehörigen Vereinigungspuncte durchschnitten, dessen Coordinaten aus den vorhergehenden durch Verwechselung von i mit $(i-1)$ erhalten werden. In Bezug auf die i^{te} Fläche sind diese Coordinaten

$$x_i = 0,$$
$$y_i = f_{i-1} = b_i,$$
$$z_i = g_{i-1} + d_{i-1} = c_i.$$

Man nennt daher gewöhnlich die Gröfsen c_i und g_i die der i^{ten} Fläche zugehörigen *Vereinigungsweiten* der Strahlen.

Glieder der höheren Ordnungen, welche sich auf die Abweichung wegen der Gestalt beziehen.

5) Die Glieder der ersten Ordnung können als eine erste Näherung betrachtet werden, so dafs die der höheren Ordnungen nur kleine Correctionen enthalten, welche an ersteren angebracht werden müssen. Diese Correctionen sind dasjenige, was man gewöhnlich die *Abweichungen wegen der Gestalt* nennt. Um sie auf eine schickliche Weise zu bezeichnen, werde ich mich der Charakteristik der endlichen Differenzen bedienen, indem ich dieselbe vor die durch die erste Näherung gefundenen Gröfsen setze. Hiernach bezeichnet Δ die Glieder der zweiten Ordnung, Δ^2 die der dritten Ordnung, u. s. w.

Dieses vorausgesetzt, fange ich mit der Entwickelung der Formeln (f) von Nro. 2. an. Da die zweite derselben aus der ersten entsteht, wenn man y und $\mathfrak{Y}$ mit x und $\mathfrak{X}$ verwechselt und $\mathfrak{f}=0$ setzt, so ist es nur nö-

thig, die erstere zu betrachten, nämlich

$$y = \mathfrak{f} - \frac{(\mathfrak{Y}-\mathfrak{f})(z-\mathfrak{g})}{\mathfrak{g}-\mathfrak{Z}}.$$

$\mathfrak{Z}$ ist von der Ordnung $\mathfrak{X}^2$; treibt man daher die Entwickelung nur bis zu den Gliedern der dritten Ordnung, so ist

$$\frac{1}{\mathfrak{g}-\mathfrak{Z}} = \frac{1}{\mathfrak{g}} + \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{g}^2} + \frac{\mathfrak{Z}^2}{\mathfrak{g}^3},$$

und der vorhergehende Ausdruck nimmt die Gestalt an:

$$y = \mathfrak{Y} - z\left(\frac{\mathfrak{Y}-\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}}\right) - \left(\frac{\mathfrak{Y}-\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}}\right)\left(\frac{z-\mathfrak{g}}{\mathfrak{g}}\right)\mathfrak{Z}$$
$$- \left(\frac{\mathfrak{Y}-\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}}\right)\left(\frac{z-\mathfrak{g}}{\mathfrak{g}}\right)\frac{\mathfrak{Z}^2}{\mathfrak{g}}.$$

Nach der angenommenen Bezeichnung hat man aber

$$\mathfrak{Y} = Y + \Delta Y + \Delta^2 Y,$$
$$\frac{1}{\mathfrak{g}} = \frac{1}{g} + \Delta\frac{1}{g} + \Delta^2\frac{1}{g},$$
$$\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}} = \frac{f}{g} + \Delta\frac{f}{g} + \Delta^2\frac{f}{g},$$
$$\mathfrak{Z} = Z + \Delta Z.$$

Dieses gibt

$$\frac{z-\mathfrak{g}}{\mathfrak{g}} = \frac{z}{\mathfrak{g}} - 1 = \frac{z-g}{g} + z\Delta\frac{1}{g},$$

$$\mathfrak{Y} - z\left(\frac{\mathfrak{Y}-\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}}\right) = Y - z\left(\frac{Y-f}{g}\right)$$
$$- z\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right) - z\left(Y\Delta^2\frac{1}{g} - \Delta^2\frac{f}{g}\right)$$
$$- \Delta Y\left[\frac{z-g}{g} + z\Delta\frac{1}{g}\right] - \Delta^2 Y\left(\frac{z-g}{g}\right),$$

$$\left(\frac{\mathfrak{Y}-\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}}\right)\left(\frac{z-\mathfrak{g}}{\mathfrak{g}}\right)\mathfrak{Z} = \frac{(Y-f)(z-g)Z}{g^2}$$
$$+ \frac{\Delta Y(z-g)Z}{g^2} + \left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)\left(\frac{z-g}{g}\right)Z$$
$$+ \frac{(Y-f)(z-g)\Delta Z}{g^2} + \frac{z(Y-f)Z}{g}\Delta\frac{1}{g},$$

$$\left(\frac{\mathfrak{Y}-\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}}\right)\left(\frac{\mathfrak{z}-\mathfrak{g}}{\mathfrak{g}}\right)\frac{\mathfrak{Z}^2}{\mathfrak{g}}=\frac{(Y-f)(z-g)\,Z^2}{g^3}.$$

Hierdurch verwandelt sich der Ausdruck von y in folgenden:

$$\left.\begin{array}{l} y=Y-z\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{Y-f}{g}\right)+\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)\\ \quad+\left(Y\Delta^2\frac{1}{g}-\Delta^2\frac{f}{g}\right)\\ \quad\quad+\Delta\frac{1}{g}\left[\Delta Y+\left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]\end{array}\right.\\ -(z-g)\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{g}\left[\Delta Y+\left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]+\frac{\Delta^2 Y}{g}+\frac{Z\Delta Y}{g^2}\\ +\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)\frac{Z}{g}+\left(\frac{Y-f}{g^2}\right)\Delta Z\\ +\left(\frac{Y-f}{g^3}\right)Z^2.\end{array}\right.\end{array}\right\}\quad\text{(a)}$$

Vermittelst der angegebenen Verwechselungen erhält man hieraus unmittelbar:

$$\left.\begin{array}{l} x=X-z\left\{\begin{array}{l}\frac{X}{g}+X\Delta\frac{1}{g}+X\Delta^2\frac{1}{g}\\ \quad\quad+\Delta\frac{1}{g}\left[\Delta X+\frac{XZ}{g}\right]\end{array}\right.\\ -(z-g)\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{g}\left[\Delta X+\frac{XZ}{g}\right]+\frac{\Delta^2 X}{g}+\frac{Z\Delta X}{g^2}\\ \quad+\frac{XZ}{g}\Delta\frac{1}{g}+\frac{X}{g^2}\Delta Z+\frac{XZ^2}{g^3}.\end{array}\right.\end{array}\right\}\quad\text{(b)}$$

Schreibt man in diesen Formeln $g+(z-g)$ statt z, so können sie auch unter die Gestalt gebracht werden:

$$y=f-g\left\{\begin{array}{l}\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)\\ \quad+\left(Y\Delta^2\frac{1}{g}-\Delta^2\frac{f}{g}\right)\\ \quad+\Delta\frac{1}{g}\left[\Delta Y+\left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]\end{array}\right\}\quad\text{(c)}$$

$$-(z-g)\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{Y-f}{g}\right)+\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)\\ +\frac{1}{g}\left[\Delta Y+\left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]\\ +\left(Y\Delta^2\frac{1}{g}-\Delta^2\frac{f}{g}\right)\\ +\Delta\frac{1}{g}\left[\Delta Y+\left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]\\ +\frac{\Delta^2 Y}{g}+\frac{Z\Delta Y}{g^2}+\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)\frac{Z}{g}\\ +\left(\frac{Y-f}{g^2}\right)\Delta Z+\left(\frac{Y-f}{g^3}\right)Z^2 \end{array}\right\} \quad \text{(c)}$$

$$x=-g\left\{X\Delta\frac{1}{g}+X\Delta^2\frac{1}{g}+\Delta\frac{1}{g}\left[\Delta X+\frac{XZ}{g}\right]\right\}$$

$$-(z-g)\left\{\begin{array}{l} \frac{X}{g}+X\Delta\frac{1}{g}+\frac{1}{g}\left[\Delta X+\frac{XZ}{g}\right]\\ +X\Delta^2\frac{1}{g}+\Delta\frac{1}{g}\left[\Delta X+\frac{XZ}{g}\right]\\ +\frac{\Delta^2 x}{g}+\frac{Z\Delta X}{g^2}+\frac{XZ}{g}\Delta\frac{1}{g}\\ +\frac{X\Delta Z}{g^2}+\frac{XZ^2}{g^3}. \end{array}\right\}$$

Da die vorhergehenden Formeln sehr complicirt sind, so füge ich die folgende Bemerkung bei, welche dazu dient, sie bei den Anwendungen, welche man gewöhnlich davon macht, sehr zu vereinfachen.

Der Hauptzweck der analytischen Untersuchungen in der Optik ist nämlich, die Lage der gebrochenen Strahlen in der Gegend des letzten durch sie hervorgebrachten Bildes zu berechnen, um Mittel zu finden, die Deutlichkeit desselben so vollkommen als möglich zu machen. Nach Nro. 4. ist aber die jenem Bilde zugehörige Abscisse, wenn man nur die Gröſsen der ersten Ordnung berücksichtigt,

$$z_1 = g_1.$$

Man kann folglich schliefsen, dafs in einer Entfernung von dem Bilde, welche die Abweichungen nicht übersteigt, $(z - g)_i$ eine Gröfse von der Ordnung dieser Abweichungen seyn mufs. Beschränkt man sich daher auf die Glieder der zweiten Ordnung, welches in den gewöhnlichen Fällen hinreicht, so kann man die Producte von $(z - g)$ in Gröfsen derselben Ordnung vernachlässigen.

Was die Glieder der dritten Ordnung betrifft, so werden sie nur bei der Theorie der achromatischen Objective gebraucht, wo sie beträchtliche Werthe erhalten. In diesem Falle ist ein Theil der Glieder, welche sich auf das Objectiv beziehen, mit der Vergröfserung multiplicirt, und hierdurch werden jene Glieder sehr bedeutend, so dafs man alle übrigen, bei welchen diefs nicht Statt findet, als zu einer höheren Ordnung gehörig betrachten kann. So sind die Glieder der zweiten Ordnung, welche von dem Objective herrühren und nicht mit der Vergröfserung multiplicirt sind, eben so wie diejenigen, welche den Ocularen zugehören, als Glieder der dritten Ordnung anzusehen. Bei der Berechnung der achromatischen Objective bestimmt man aber die willkürlichen Gröfsen, welche in den Ausdrücken der Abweichungen vorkommen, auf eine solche Art, dafs diese so vollkommen als möglich vernichtet werden, welches geschieht, wenn die Summe der correspondirenden Glieder der zweiten und dritten Ordnung verschwindet, die Glieder beider Ordnungen folglich gleich und entgegengesetzt werden, damit sie sich wechselseitig aufheben können. Hierdurch reduciren sich $\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)$ und $X\Delta\frac{1}{g}$, welche den Abweichungen entsprechen, auf Gröfsen von der Ordnung derjenigen, welche von den Ocularen herrühren, und

können daher in diesem Falle als Glieder der dritten Ordnung betrachtet werden; eben so $(z-g)$, welches immer von der Ordnung der Abweichungen ist, wenn man die Lage der Strahlen nur in der Nähe des letzten Bildes untersucht.

Aus dem Gesagten geht hervor, dafs es in den beiden angegebenen Fällen erlaubt ist, die Producte von $\Delta\frac{1}{g}$ und $(z-g)$ in Gröfsen der zweiten Ordnung zu vernachlässigen. Hierdurch werden die Formeln (c), wenn man sie auf die i^{te} Fläche bezieht,

$$\left.\begin{aligned} y_i &= f_i - g_i\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i \\ &\quad - g_i\left(Y\Delta^2\frac{1}{g} - \Delta^2\frac{f}{g}\right)_i \\ &\quad - (z-g)_i\left(\frac{Y-f}{g}\right)_i, \\ x_i &= - g_i X_i \Delta\frac{1}{g_i} - g_i X_i \Delta^2\frac{1}{g_i} \\ &\quad - (z-g)_i \frac{X_i}{g_i}. \end{aligned}\right\} \text{(d)}$$

(Die Fortsetzung folgt.)

II.

Über die Integration der Differenzialgleichungen mehrerer Variablen der ersten Ordnung und des zweiten Grades;

von

Joseph L. Raabe.

(Beschlufs.)

§. 5.

Bei der in dem vorhergehenden Paragraphe aus einander gesetzten Transformationsmethode bleibt noch der Fall zu erörtern übrig, in welchem die Gleichungen (E) die Werthe von $\frac{dx_2}{dx_1}$, $\frac{dx_3}{dx_1}$, $\frac{dx_4}{dx_1}$, etc. unbestimmt lassen oder auf $\frac{0}{0}$ reduciren.

Tritt dieser Umstand ein, dann ist es gleich viel, welchen Functionen von x_1, x_2, x_3, x_4, etc. die Differenzialquotienten $\frac{dx_2}{dx_1}$, $\frac{dx_3}{dx_1}$, $\frac{dx_4}{dx_1}$, etc. gleich gesetzt werden, damit den Gleichungen (E) Genüge geschehe; dadurch werden die Werthe von x_2, x_3, x_4, etc., die durch die letzten Gleichungen des vorhergehenden Paragraphs völlig bestimmt waren, jetzt unbestimmt bleiben, so dafs man haben wird

$$x_2 = F_2(x_1, y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-1}),$$
$$x_3 = F_3(x_1, y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-1}),$$
$$x_4 = F_4(x_1, y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = F_n(x_1, y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-1}),$$

wo F_2, F_3, ... F_n willkürliche Functionen der Grössen x_1, y_1, y_2, ... y_{n-1} seyn werden; es wird also

wegen des Statthabens der Gleichungen (E), wenn man aus diesen Gleichungen die Werthe von x_2, x_3, . . . x_n wie auch die Werthe ihrer Differenzialien in die Gleichung (A) substituirt, eine andere von der Form (B) zum Vorschein kommen müssen.

Der Theil rechter Hand des Gleichheitszeichens dieser Gleichung (B) kann nun der in ihm vorkommenden willkürlichen Functionen wegen, durch Bestimmung derselben, immer zu einem vollständigen Quadrate gemacht werden.

Denn damit der erwähnte Theil der Gleichung (B) ein Quadrat werde, ist es nöthig, dafs die Coefficienten B_1, B_2, etc., $B_{1,2}$, etc. ein System von $\frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}$ Bedingungsgleichungen von den Formen

$$B^2_{1,2} - B_1 B_2 = 0,$$
$$B^2_{1,3} - B_1 B_3 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$B^2_{2,3} - B_2 B_3 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

eingehen.

Diese Gleichungen werden die Variablen x_1, y_1, y_2, . . . y_{n-1} und eine unbestimmte Anzahl willkürlicher Constanten enthalten, die die willkürlichen Functionen F_2, F_3, . . . F_n mit sich führen können. Eliminirt man aus denselben, oder vielmehr denkt man sich aus denselben die n Gröfsen x_1, y_1, y_2, . . . y_{n-1} eliminirt, so bleibt noch eine Anzahl von

$$\frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} - n = \frac{n^2 - 5n + 2}{2}$$

Gleichungen, die blofs eine unbestimmte Anzahl willkürlicher Constanten enthalten, und denen, wie eine einfache Überlegung zeigt, immer Genüge geschehen kann.

Nachdem nun der zweite Theil der Gleichung (B)

ein vollständiges Quadrat ist, ziehe man beiderseits die zweite Wurzel aus, so wird man dann eine Gleichung von der Form

$$dx_1 = C_1\,dy_1 + C_2\,dy_2 + C_3\,dy_3 + \ldots + C_{n-1}\,dy_{n-1}$$

erhalten.

Substituirt man in diese Gleichung für $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ ihre Werthe, durch $x_1, x_2, \ldots x_n$ ausgedrückt, zurück, so kann nur die vorgelegte Gleichung (A) zum Vorschein kommen; weil aber diese so eben gefundene Gleichung in Bezug auf ihre Differenzialien linear ist, so muſs die aus ihr durch Substitution erhaltene Gleichung (A) ebenfalls von linearer Form in Bezug auf die Differenzialien seyn.

Es erhellt also hieraus, daſs, wenn die Coefficienten A_1, A_2, A_3, etc., $A_{1,2}$, $A_{1,3}$, etc. der Gleichung (A) so beschaffen sind, daſs sie in den Gleichungen (E) die Werthe von $\frac{dx_2}{dx_1}, \frac{dx_3}{dx_1}, \frac{dx_4}{dx_1}$, etc. unbestimmt lassen, dieses ein sicheres Merkmal sey, daſs die Gleichung (A) einer linearen Form in Bezug auf ihre Differenzialien fähig ist, welches wir auch bei einer Differenzialgleichung von der Form (A) dreier Variablen im zweiten Paragraphe bestätigt gefunden haben.

Zweite Abtheilung.

Über die Reduction der Gleichung (B) in ein System von $n-1$ linearen Differenzialgleichungen mit $n-2$ neuen Variablen.

§. 6.

Um auch hier mit dem einfachsten Falle den Anfang zu machen, wollen wir zuerst zeigen, wie die Gleichung (7) in ein System zweier Gleichungen, die in Bezug auf

ihre Differenzialien linear sind und eine Variable mehr enthalten, reducirt werden könne.

Zu diesem Zwecke nehmen wir an, die beiden gesuchten linearen Differenzialgleichungen seyen von der Form

$$\left.\begin{aligned} o &= a_1 dy_1 + a_2 dy_2, \\ dx_1 &= b_1 dy_1 + b_2 dy_2, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

wo a_1, a_2, b_1, b_2 einstweilen noch unbekannt sind.

Diese zwei Gleichungen müssen so beschaffen seyn, daſs durch irgend eine Verbindung derselben die Gleichung (7) zum Vorscheine komme. Die einfachste dieser Verbindungen wird wohl die seyn, daſs, wenn eine jede derselben quadrirt und dann ihre Summe genommen wird, die Gleichung (7) erhalten werde.

Führt man die angezeigte Operation aus, so erhält man

$$dx_1^2 = (a_1^2 + b_1^2)\, dy_1^2 + (a_2^2 + b_2^2)\, dy_2^2 + 2\,(a_1 a_2 + b_1 b_2)\, dy_1\, dy_2.$$

Soll nun diese Gleichung mit (7) identisch seyn, so muſs man haben

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 = B_1, \quad a_2^2 + b_2^2 = B_2, \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 = B_{1,2}, \end{aligned}\right\} \quad . \quad (14)$$

Da man hier vier unbekannte Gröſsen a_1, a_2, b_1, b_2 und bloſs drei Gleichungen hat, so sieht man, daſs eine dieser Gröſsen willkürlich bleibt, folglich werden die Gleichungen (13) bloſs eine neue willkürliche oder variable Gröſse enthalten.

In den meisten Fällen wird man diese Gleichungen am bequemsten auf folgende Art auflösen:

Man setze nämlich zuerst

$$\left.\begin{aligned} a_1 = B_1^{\frac{1}{2}} \alpha_1, \quad b_1 = B_1^{\frac{1}{2}} \beta_1, \\ a_2 = B_2^{\frac{1}{2}} \alpha_2, \quad b_2 = B_2^{\frac{1}{2}} \beta_2, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

so gehen die Gleichungen (14) in folgende über:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1,$$

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 = \frac{B_{1,2}}{\sqrt{B_1 B_2}}.$$

Setzt man ferner

$$\alpha_1 = \cos. p_1, \quad \alpha_2 = \cos. p_2,$$

so geben die beiden ersten der vorhergehenden drei Gleichungen

$$\beta_1 = \sin. p_1, \quad \beta_2 = \sin. p_2,$$

und die dritte dieser Gleichungen gibt dann

$$\cos. (p_2 - p_1) = \frac{B_{1,2}}{\sqrt{B_1 B_2}}, \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

folglich

$$p_2 = p_1 + \text{arc.} \cos. \frac{B_{1,2}}{\sqrt{B_1 B_2}}.$$

Man hat also

$$\cos. p_2 = \frac{B_{1,2} \cos. p_1 - \sqrt{B_1 B_2 - B_{1,2}^2} \sin. p_1}{\sqrt{B_1 B_2}},$$

$$\sin. p_2 = \frac{B_{1,2} \sin. p_1 + \sqrt{B_1 B_2 - B_{1,2}^2} \cos. p_1}{\sqrt{B_1 B_2}},$$

daher ist

$$\alpha_1 = \cos. p_1, \quad \alpha_2 = \frac{B_{1,2} \cos. p_1 - \sqrt{B_1 B_2 - B_{1,2}^2} \sin. p_1}{\sqrt{B_1 B_2}}$$

$$\beta_1 = \sin. p_1, \quad \beta_2 = \frac{B_{1,2} \sin. p_1 + \sqrt{B_1 B_2 - B_{1,2}^2} \cos. p_1}{\sqrt{B_1 B_2}}$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (15), so gehen sie in folgende über:

$$a_1 = B_1^{\frac{1}{2}} \cos. p_1, \quad a_2 = \frac{B_{1,2} \cos. p_1 - \sqrt{B_1 B_2 - B_{1,2}^2} \sin. p_1}{B_1^{\frac{1}{2}}}$$

$$b_1 = B_1^{\frac{1}{2}} \sin. p_1, \quad b_2 = \frac{B_{1,2} \sin. p_1 + \sqrt{B_1 B_2 - B_{1,2}^2} \cos. p_1}{B_1^{\frac{1}{2}}}$$

Es gehen mithin die Gleichungen (13) in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= B_1 \cos. p_1\, dy_1 \\ &+ \left[B_{1,2} \cos. p_1 - \sqrt{B_1 B_2 - B_{1,2}^2} \sin. p_1\right] dy_2 \\ dx_1 &= \\ &= \frac{B_1 \sin. p_1 dy_1 + \left[B_{1,2} \sin. p_1 + \sqrt{B_1 B_2 - B_{1,2}^2} \cos. p_1\right] dy_2}{B_1^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

welche zwei Gleichungen durch Elimination von p_1 die vorgelegte Differenzialgleichung (7) geben.

Der besondere Fall, den wir in §. 1. betrachtet haben, nämlich die gefundene Differenzialgleichung (b) daselbst, geht mit Hülfe der so eben aufgestellten Gleichungen in folgende swei über:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= (1 + y_1^2) \cos. p_1\, dy_1 \\ &- \left(y_1 y_2 \cos. p_1 + \sqrt{1 + y_1^2 + y_2^2} \sin. p_1\right) dy_2 \\ \frac{a\, dx_1}{x_1^2 - a^2} &= \\ &= \frac{(1+y_1^2) \sin. p_1 dy_1 - \left(y_1 y_2 \sin. p_1 - \sqrt{1+y_1^2+y_2^2} \cos. p_1\right) dy_2}{\sqrt{1+y_1^2}\sqrt{1+y_1^2+y_2^2}} \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

Für den besondern Fall, wenn man $B_{1,2} = 0$ hat, lassen sich die Gleichungen (17) bedeutend vereinfachen, denn sie gehen dann in folgende über:

$$0 = B_1^{\frac{1}{2}} \cos. p_1\, dy_1 - B_2^{\frac{1}{2}} \sin. p_1\, dy_2,$$

$$dx_1 = B_1^{\frac{1}{2}} \sin. p_1\, dy_1 + B_2^{\frac{1}{2}} \cos. p_1\, dy_2.$$

Geht hier p_1 in $90^\circ + p_1$ über, so hat man

$$\left.\begin{aligned} 0 &= B_1^{\frac{1}{2}} \sin. p_1\, dy_1 + B_2^{\frac{1}{2}} \cos. p_1\, dy_2, \\ dx_1 &= B_1^{\frac{1}{2}} \cos. p_1\, dy_1 - B_2^{\frac{1}{2}} \sin. p_1\, dy_2. \end{aligned}\right\} \quad . \; (18)$$

Finden aber folgende zwei Gleichungen

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0,$$

oder nur eine derselben Statt, so ersieht man aus der Gleichung (16), dafs man die Gleichungen (17) nicht

mehr erhalten kann. In diesem Falle ist es am bequemsten, aus den Gleichungen (14) drei der Gröfsen a_1, a_2, b_1, b_2 als Functionen der vierten zu bestimmen.

Nehmen wir z. B. an, es finden beide zuletzt aufgestellten Gleichungen Statt, so ist die zu reducirende Differenzialgleichung (7) von folgender Form:

$$dx_1^2 = 2B_{1,2}\, dy_1\, dy_2.$$

Die Gleichungen (14) geben dann

$$b_1 = a_1\sqrt{-1}, \quad b_2 = -\frac{B_{1,2}\sqrt{-1}}{2a_1}, \quad a_2 = \frac{B_{1,2}}{2a_1},$$

und die Gleichungen (13) gehen dann in folgende über:

$$\begin{cases} 0 = a_1\, dy_1 + \dfrac{B_{1,2}}{2a_1}\, dy_2, \\ dx_1 = \sqrt{-1}\left[a_1\, dy_1 - \dfrac{B_{1,2}}{2a_1}\, dy_2\right]. \end{cases}$$

Hier ist also a_1 die neu eingeführte Variable, und wenn diese aus den letzten Gleichungen eliminirt wird, erhält man die vorgelegte.

§. 7.

Die Rechnung wird bedeutend vereinfacht, wenn die vorgelegte Differenzialgleichung (7) so beschaffen ist, dafs der Theil rechts derselben die Variable x_1 oder irgend eine Function derselben nur als gemeinschaftlichen Factor enthält. In der That, denkt man sich dann eine der Variablen y_1, y_2, z. B. y_2 als Function von y_1 und einer neuen Variablen z_1, so hat man durch Differenziation

$$dy_2 = \frac{dy_2}{dy_1}\, dy_1 + \frac{dy_2}{dz_1}\, dz_1.$$

Substituirt man diesen Werth von dy_2 in die Gleichung (7), so nimmt sie folgende Form an:

$$dx_1^2 = \left[B_1 + 2B_{1,2}\frac{dy_2}{dy_1} + B_2\left(\frac{dy_2}{dy_1}\right)^2\right]dy_1^2 + B_2\,dz_1^2$$
$$+ 2\frac{dy_2}{dz_1}\left(B_{1,2} + B_2\frac{dy_2}{dy_1}\right)dy_1\,dz_1.$$

Wählt man nun die Abhängigkeit der Gröfse y_2 von y_1, z_1 dergestalt, dafs der Coefficient von $dy_1\,dz_1$ in der letzten Gleichung verschwindet, so mufs man folgende identische Gleichung haben:

$$0 = B_{1,2} + B_2\frac{dy_2}{dy_1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Da nun diese Gleichung vermöge der Annahme, dafs der Theil rechts der Gleichung (7) die Variable x_1 nur als gemeinschaftlichen Factor enthalte, von x_1 befreiet seyn wird, so enthält sie blofs die zwei Veränderlichen y_1, y_2, und gibt durch Integration

$$y_2 = \psi_2(y_1, z_1),$$

wo ψ_2 eine bekannte Function, und z_1 die willkürliche Constante der Integration vorstellt.

Wenn nun dieser Werth von y_2 wie auch der von dy_2 unter der Annahme, dafs z_1 ebenfalls variabel ist, in die Gleichung (7) gesetzt wird, so nimmt sie folgende Form an:

$$dx_1^2 = Y_1\,dy_1^2 + Z_1\,dz_1^2, \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

wo Y_1, Z_1 leicht zu bestimmende Gröfsen seyn werden.

Nach den Gleichungen (18) des vorhergehenden Paragraphs zerfällt diese Gleichung in folgende zwei:

$$0 = Y_1^{\frac{1}{2}}\sin.p_1\,dy_1 + Z_1^{\frac{1}{2}}\cos.p_1\,dz_1,$$
$$dx_1 = Y_1^{\frac{1}{2}}\cos.p_1\,dy_1 - Z_1^{\frac{1}{2}}\sin.p_1\,dz_2.$$

Wie die Gleichung (19) zeigt, wird die so eben vorgetragene Vereinfachung auch dann eintreten, wenn entweder $B_{1,2}$, B_2 oder $B_{1,2}$, B_1 die Variable x_1 blofs als gemeinschaftlichen Factor enthalten; im letztern

Falle wird man blofs y_1 als Function von y_2 und einer neuen Variablen z_1 annehmen müssen.

Das in §. 1. gerechnete Beispiel, oder die Gleichung (b) daselbst, kann dieser Vereinfachung theilhaftig werden, und die Gleichung (19) geht für dasselbe in folgende über:

$$o = \frac{-y_1 y_2 (x_1^2 - a^2)^2}{a^2(1 + y_1^2 + y_2^2)} + \frac{(1 + y_1^2)(x_1^2 - a^2)^2}{a^2(1 + y_1^2 + y_2^2)} \frac{dy_2}{dy_1},$$

oder, wenn man den gemeinschaftlichen Factor wegläfst,

$$\frac{dy_2}{y_2} = \frac{y_1 \, dy_1}{1 + y_1^2}.$$

Diese Gleichung integrirt, gibt

$$y_2 = z_1 \sqrt{1 + y_1^2},$$

die Gleichung (20) geht daher in folgende über:

$$dx_1^2 = \frac{(x_1^2 - a^2)^2}{a^2} \left[\frac{dy_1^2}{1 + y_1^2} + \frac{1 + y_1^2}{1 + z_1^2} \, dz_1^2 \right],$$

und die Gleichungen (18) sind dann:

$$\left.\begin{aligned} o &= \frac{\sin. p_1}{\sqrt{1 + y_1^2}} dy_1 + \frac{\sqrt{1 + y_1^2}}{\sqrt{1 + z_1^2}} \cos. p_1 \, dz_1, \\ dx_1 &= \frac{x_1^2 - a^2}{a} \left[\frac{\cos \, p_1}{\sqrt{1 + y_1^2}} dy_1 - \frac{\sqrt{1 + y_1^2}}{\sqrt{1 + z_1^2}} \sin. p_1 \, dz_1 \right] \end{aligned}\right\} \quad (d)$$

§. 8.

Es sey ferner die Gleichung (12) in folgende drei lineare Differenzialgleichungen aufgelöst:

$$\left.\begin{aligned} o &= a_1 \, dy_1 + a_2 \, dy_2, \\ o &= b_1 \, dy_1 + b_2 \, dy_2 + b_3 \, dy_3, \\ dx_1 &= c_1 \, dy_1 + c_2 \, dy_3 + c_3 \, dy_3, \end{aligned}\right\} \quad . \quad (21)$$

wo a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 einstweilen noch unbekannt sind.

Werden diese sämmtlichen Gleichungen quadrirt und dann ihre Summen genommen, so hat man

$$dx_1^2 = (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)\,dy_1^2 + (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)\,dy_2^2$$
$$+ (b_3^2 + c_3^2)\,dy_3^2$$
$$+ 2\,[(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2)\,dy_1\,dy_2$$
$$+ (b_1 b_3 + c_1 c_3)\,dy_1\,dy_3]$$
$$+ 2\,(b_2 b_3 + c_2 c_3)\,dy_2\,dy_3\,.$$

Nun soll diese Gleichung mit der Gleichung (12) identisch seyn, daher müssen folgende Gleichungen bestehen:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= B_1, \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 &= B_2, \\ b_3^2 + c_3^2 &= B_3, \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 &= B_{1,2}, \\ b_1 b_3 + c_1 c_3 &= B_{1,3}, \\ b_2 b_3 + c_2 c_3 &= B_{2,3}\,. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (22)$$

Da man hier sechs Gleichungen und acht unbekannte Gröfsen a_1, b_1, etc. hat, so sieht man, dafs zwei dieser Gröfsen noch willkürlich oder variabel bleiben.

Ist keiner der Coefficienten B_1, B_2, B_3 gleich Null, so lassen sich die Gleichungen (22) am bequemsten auf folgende Weise behandeln:

Man setze nämlich zuerst

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= B_1^{\frac{1}{2}}\alpha_1, & b_1 &= B_1^{\frac{1}{2}}\beta_1, & c_1 &= B_1^{\frac{1}{2}}\gamma_1, \\ a_2 &= B_2^{\frac{1}{2}}\alpha_2, & b_2 &= B_2^{\frac{1}{2}}\beta_2, & c_2 &= B_2^{\frac{1}{2}}\gamma_2, \\ & & b_3 &= B_3^{\frac{1}{2}}\beta_3, & c_3 &= B_3^{\frac{1}{2}}\gamma_3, \end{aligned}\right\} (23)$$

so gehen die Gleichungen (22) in folgende über:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_2^2 = 1,$$
$$\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1,$$
$$\beta_3^2 + \gamma_3 = 1,$$
$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = \frac{B_{1,2}}{\sqrt{B_1 B_2}},$$

$$\beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 = \frac{B_{1,3}}{\sqrt{B_1 B_3}},$$

$$\beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = \frac{B_{2,3}}{\sqrt{B_2 B_3}}.$$

Um diese sechs Gleichungen bequemer aufzulösen, setze man

$$\alpha_1 = \cos.p_1, \quad \beta_1 = \sin.p_1 \cos.q_1,$$
$$\alpha_2 = \cos.p_2, \quad \beta_2 = \sin.p_2 \cos.q_2,$$
$$\beta_3 = \cos.p_3,$$

so folgt aus den drei ersten der vorigen sechs Gleichungen

$$\gamma_1 = \sin.p_1 \sin.q_1, \quad \gamma_2 = \sin.p_2 \sin.q_2, \quad \gamma_3 = \sin.p_3,$$

und die drei letzten derselben Gleichungen geben

$$\left.\begin{array}{r}\cos.p_1 \cos.p_2 + \sin.p_1 \sin.p_2 \cos.(q_1 - q_2) = \frac{B_{1,2}}{\sqrt{B_1 B_2}}\\ \sin.p_1 \cos.(p_3 - q_1) = \frac{B_{1,3}}{\sqrt{B_1 B_3}}\\ \sin.p_2 \cos.(p_3 - q_2) = \frac{B_{2,3}}{\sqrt{B_2 B_3}}\end{array}\right\} \quad (24)$$

Aus diesen drei Gleichungen kann man immer drei der Gröfsen p_1, p_2, p_3, q_1, q_2 als Functionen der beiden andern, und der Coefficienten B_1, B_2, etc. bestimmen. Am bequemsten ist es, die letzten drei Gröfsen als Functionen der beiden ersten auszudrücken, welches man mit Hülfe algebraischer Gleichungen des zweiten Grades immer ausführen kann.

Hat man nun p_3, q_1, q_2 als Functionen von p_1, p_2, B_1, B_2, etc. bestimmt, so kann man mit Hülfe der vorhergehenden Gleichungen α_1, β_1, γ_1; α_2, etc. ebenfalls als Functionen dieser Gröfsen ausdrücken, und daher vermöge der Gleichungen (23) hat man auch a_1, b_1, c_1, a_2, etc. als bekannte Functionen von x_1, y_1, y_2, y_3, p_1, p_2. Substituirt man nun diese Werthe in die Gleichungen (21), so hat man die Differenzialgleichung (12)

in ein System dreier linearer Differenzialgleichungen erster Ordnung aufgelöst.

Sind aber einer oder der andere der Coefficienten B_1, B_2, B_3 gleich Null, dann mufs man aus den Gleichungen (22) selbst sechs der Gröfsen a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, b_3, c_3 als Functionen der beiden andern und der Coefficienten $B_{1,2}$, $B_{1,3}$, $B_{2,3}$ ausmitteln.

Für den besondern Fall hingegen, wenn in der Differenzialgleichung (12) die Coefficienten $B_{1,2}$, $B_{1,3}$, $B_{2,3}$ fehlen, gehen die Gleichungen (24) in folgende über:

$$\cos.p_1 \cos.p_2 + \sin.p_1 \sin.p_2 \cos.(q_1 - q_2) = 0,$$
$$\sin.p_1 \cos.(p_3 - q_1) = 0,$$
$$\sin.p_2 \cos.(p_3 - q_2) = 0.$$

Aus den beiden letzten dieser Gleichungen erhält man

$$\cos.(p_3 - q_1) = 0, \quad \cos.(p_3 - q_2) = 0,$$

folglich

$$q_1 = \frac{\pi}{2} + p_3, \quad q_2 = \frac{\pi}{2} + p_3,$$

wo π die halbe Peripherie des Kreises für den Halbmesser 1 vorstellt. Die erste derselben drei Gleichungen gibt dann

$$\cos.(p_1 - p_2) = 0 \quad \text{oder} \quad p_2 = \frac{\pi}{2} + p_1,$$

man hat also für den gegenwärtigen Fall

$$\alpha_1 = \cos.p_1, \quad \beta_1 = -\sin.p_1 \sin.p_3, \quad \gamma_1 = \sin.p_1 \cos.p_3,$$
$$\alpha_2 = -\sin.p_1, \quad \beta_2 = -\cos.p_1 \sin.p_3, \quad \gamma_2 = \cos.p_1 \cos.p_3,$$
$$\beta_3 = \cos.p_3, \quad \gamma_3 = \sin.p_3.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (23), so hat man

$$a_1 = B_1^{\frac{1}{2}} \cos.p_1, \quad a_2 = -B_2^{\frac{1}{2}} \sin.p_1,$$
$$b_1 = -B_1^{\frac{1}{2}} \sin.p_1 \sin.p_3, \quad b_2 = -B_2^{\frac{1}{2}} \cos.p_1 \sin.p_3;$$
$$b_3 = B_3^{\frac{1}{2}} \cos.p_3;$$

$$c_1 = B_1^{\frac{1}{2}} \sin. p_1 \cos. p_3, \quad c_2 = B_2^{\frac{1}{2}} \cos. p_1 \cos. p_3,$$
$$c_3 = B_3^{\frac{1}{2}} \sin. p_3.$$

Setzt man in diesen Gleichungen statt p_1, $180^0 - p_1$, und statt p_3, $90^0 - q_1$, und substituirt die erhaltenen Resultate in die Gleichungen (21), so gehen sie in folgende über:

$$\left.\begin{aligned}
o &= B_1^{\frac{1}{2}} \cos. p_1\, dy_1 + B_2^{\frac{1}{2}} \sin, p_1\, dy_2, \\
o &= B_1^{\frac{1}{2}} \sin. p_1 \cos. q_1\, dy_1 - B_2^{\frac{1}{2}} \cos. p_1 \cos. q_1\, dy_2 \\
&\quad - B_3^{\frac{1}{2}} \sin. q_1\, dy_3, \\
dx_1 &= B_1^{\frac{1}{2}} \sin. p_1 \sin. q_1\, dy_1 - B_2^{\frac{1}{2}} \cos. p_1 \sin. q_1\, dy_2 \\
&\quad + B_3^{\frac{1}{2}} \cos. q_1\, dy_3.
\end{aligned}\right\} (25)$$

§. 9.

Wenn die in dem vorhergehenden Paragraphe behandelte Differenzialgleichung (12) so beschaffen ist, daſs der Theil rechts derselben die Variable x_1 oder irgend eine Function derselben bloſs als gemeinschaftlichen Factor enthält, dann kann man sie in eine andere transformiren, die bedeutend einfacher ist. In der That, denkt man sich unter dieser Voraussetzung zwei der Variablen y_1, y_2, y_3, z. B. die beiden letztern als noch unbekannte Functionen der erstern und zwei neuer Veränderlichen z_1, z_2 ausgedrückt, so hat man durch's Differenziren:

$$\left.\begin{aligned}
dy_2 &= \frac{dy_2}{dy_1} dy_1 + \frac{dy_2}{dz_1} dz_1 + \frac{dy_2}{dz_2} dz_2, \\
dy_3 &= \frac{dy_3}{dy_1} dy_1 + \frac{dy_3}{dz_1} dz_1 + \frac{dy_3}{dz_2} dz_2.
\end{aligned}\right\} (26)$$

Substituirt man diese Werthe von dy_2, dy_3 in die Gleichung (14), so nimmt sie folgende Form an:

$$dx_1^2 = Y_1\,dy_1^2 + Z_1\,dz_1^2 + Z_2\,dz_2^2$$
$$+ 2\,(Y_{1,1}\,dy_1\,dz_1 + Y_{1,2}\,dy_1\,dz_2)$$
$$+ 2\,Z_{1,2}\,dz_1\,dz_2\,,$$

in welcher die Coefficienten leicht darzustellen sind.

Da nun die Abhängigkeit der Variablen y_2, y_3 von y_1, z_1, z_2 einstweilen noch willkürlich war, so wollen wir nun dergestalt darüber verfügen, dafs die Coefficienten von $dy_1\,dz_1$, $dy_1\,dz_2$ in der letzten Gleichung verschwinden.

Hierdurch erhält man

$$Y_{1,1} = 0, \quad Y_{1,2} = 0,$$

oder wenn die Werthe der Theile links gesetzt werden:

$$0 = \frac{dy_2}{dz_1}\left(B_{1,2} + B_2\,\frac{dy_2}{dy_1} + B_{2,3}\,\frac{dy_3}{dy_1}\right)$$
$$+ \frac{dy_3}{dz_1}\left(B_{1,3} + B_{2,3}\,\frac{dy_2}{dy_1} + B_3\,\frac{dy_3}{dy_1}\right),$$
$$0 = \frac{dy_2}{dz_2}\left(B_{1,2} + B_2\,\frac{dy_2}{dy_1} + B_{2,3}\,\frac{dy_3}{dy_1}\right)$$
$$+ \frac{dy_3}{dz_2}\left(B_{1,3} + B_{2,3}\,\frac{dy_2}{dy_1} + B_3\,\frac{dy_3}{dy_1}\right).$$

Sollen diese Gleichungen Statt haben, z_1, z_2 mögen constant oder variabel seyn, so müssen folgende zwei Gleichungen bestehen:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= B_{1,2} + B_2\,\frac{dy_2}{dy_1} + B_{2,3}\,\frac{dy_3}{dy_1}, \\ 0 &= B_{1,3} + B_{2,3}\,\frac{dy_2}{dy_1} + B_3\,\frac{dy_3}{dy_1}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (27)$$

Vermöge der Annahme, dafs in der Gleichung (12) der Theil rechts die Variable x_1 nur als gemeinschaftlichen Factor enthalte, werden die letzten Gleichungen von x_1 befreiet seyn. Sucht man nun aus denselben die Werthe von $\frac{dy_2}{dy_1}$, $\frac{dy_3}{dy_1}$, und substituirt sie in die Gleichungen (26), wenn man nämlich z_1, z_2 als constant

betrachtet, so kann man dadurch diese beiden Differenzialgleichungen integriren, und man wird erhalten

$$y_2 = \psi_2(y_1, z_1, z_2),$$
$$y_3 = \psi_3(y_1, z_1, z_2),$$

wo ψ_2, ψ_3 bekannte Functionen, und z_1, z_2 die willkürlichen Constanten der Integrationen vorstellen.

Substituirt man diese Werthe von y_2, y_3 unter der Annahme, dafs z_1, z_2 Variable sind, in die Gleichung (12), so nimmt sie folgende Form an:

$$dx_1^2 = Y_1 dy_1^2 + Z_1 dz_1^2 + Z_2 dz_2^2 + 2 Z_{1,2} dz_1 dz_2 \quad . \quad . \quad (28)$$

In dem Falle endlich, wenn diese letzte Gleichung so beschaffen ist, dafs entweder Z_1 und $Z_{1,2}$ oder Z_2 und $Z_{1,2}$ die Variablen x_1, y_1 oder irgend eine Function derselben nur als gemeinschaftlichen Factor enthalten, kann man durch eine ähnliche Betrachtung, wie im §. 7., dieser Gleichung folgende Form geben:

$$dx_1^2 = Y_1 dy_1^2 + Z_1 dz_1^2 + U_1 du_1^2 \quad . \quad (29)$$

Wendet man das hier aus einander gesetzte Verfahren auf unsern besondern Fall im §. 3. oder auf die Gleichung (b′) an, so gehen die Gleichungen (27) in folgende über:

$$0 = y_1 y_2 - (1 + y_1^2 + y_3^2)\frac{dy_2}{dy_1} + y_2 y_3 \frac{dy_3}{dy_1},$$
$$0 = y_1 y_3 + y_2 y_3 \frac{dy_2}{dy_1} - (1 + y_1^2 + y_2^2)\frac{dy_3}{dy_1}.$$

Hieraus findet man

$$\frac{dy_2}{y_2} = \frac{y_1 dy_1}{1 + y_1^2},$$
$$\frac{dy_3}{y_3} = \frac{y_1 dy_1}{1 + y_1^2},$$

und integrirt

$$y_2 = z_1 \sqrt{1 + y_1^2},$$
$$y_3 = z_2 \sqrt{1 + y_1^2},$$

die Gleichung (28) ist daher im vorliegenden Falle folgende:

$$dx_1^2 = \frac{(x_1^2 - a^2)^2}{a^2}\left\{\begin{aligned} &\frac{dy_1^2}{1+y_1^2} + \frac{(1+y_1^2)(1+z_2^2)}{1+z_1^2+z_2^2}\,dz_1^2 \\ &\qquad + \frac{(1+y_1^2)(1+z_1^2)}{1+z_1^2+z_2^2}\,dz_2^2 \\ &\qquad - \frac{2z_1 z_2(1+y_1^2)}{1+z_1^2+z_2^2}\,dz_1\,dz_2. \end{aligned}\right\}$$

Setzt man ferner in dieser Gleichung

$$z_2 = u_1\sqrt{1+z_1^2},$$

so nimmt sie die Form von (29) an, und zwar hat man

$$dx_1^2 = \frac{(x_1^2-a^2)^2}{a^2}\left\{\begin{aligned} &\frac{dy_1^2}{1+y_1^2} \\ &+(1+y_1^2)\left[\frac{dz_1^2}{1+z_1^2} + \frac{1+z_1^2}{1+u_1^2}\,du_1^2\right] \end{aligned}\right\} \quad (c')$$

Mit Hülfe der Gleichungen (25) zerfällt diese Gleichung in folgende drei lineare:

$$0 = \frac{\cos.p_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\,dy_1 + \frac{\sin.p_1\sqrt{1+y_1^2}}{\sqrt{1+z_1^2}}\,dz_1,$$

$$0 = \frac{\sin.p_1\cos.q_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\,dy_1 - \frac{\cos.p_1\cos\,q_1\sqrt{1+y_1^2}}{\sqrt{1+z_1^2}}\,dz_1$$
$$- \frac{\sin.q_1\sqrt{1+y_1^2}\sqrt{1+z_1^2}}{\sqrt{1+u_1^2}}\,du_1,$$

$$dx_1 = \frac{x_1^2-a^2}{a}\left\{\begin{aligned} &\frac{\sin.p_1\sin.q_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\,dy_1 - \frac{\cos.p_1\sin.q_1\sqrt{1+y_1^2}}{\sqrt{1+z_1^2}}\,dz_1 \\ &\qquad + \frac{\cos q_1\sqrt{1+y_1^2}\sqrt{1+z_1^2}}{\sqrt{1+u_1^2}}\,du_1 \end{aligned}\right\}$$

Eliminirt man aus denselben p_1, q_1, so kommt die Differenzialgleichung (c′) zum Vorscheine.

§. 10.

Wir wollen nun auf gleiche Weise, wie in den §§. 6., 8., eine Differenzialgleichung von fünf Variablen

der Form

$$\left.\begin{aligned} dx_1^2 = {} & B_1\,dy_1^2 + B_2\,dy_2^2 + B_3\,dy_3^2 + B_4\,dy_4^2 \\ & + 2(B_{1,2}\,dy_1 dy_2 + B_{1,3}\,dy_1 dy_3 + B_{1,4}\,dy_2 dy_4) \\ & + 2(B_{2,3}\,dy_2 dy_3 + B_{2,4}\,dy_2 dy_4) \\ & + 2\,B_{3,4}\,dy_3 dy_4 \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

in ein System von vier linearen Differenzialgleichungen mit drei neuen Variablen reduciren.

Es seyen

$$\left.\begin{aligned} 0 &= a_1\,dy_1 + a_2\,dy_2 \\ 0 &= b_1\,dy_1 + b_2\,dy_2 + b_3\,dy_3 \\ 0 &= c_1\,dy_1 + c_2\,dy_2 + c_3\,dy_3 + c_4\,dy_4 \\ dx_1 &= e_1\,dy_1 + e_2\,dy_2 + e_3\,dy_3 + e_4\,dy_4 \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

die vier verlangten linearen Differenzialgleichungen, so erhält man, wenn sie quadrirt und addirt werden, durch Vergleichung mit der Gleichung (30) folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + e_1^2 &= B_1, \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + e_2^2 &= B_2, \\ b_3^2 + c_3^2 + e_3^2 &= B_3, \\ c_4^2 + e_4^2 &= B_4, \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 + e_1 e_2 &= B_{1,2}, \\ b_1 b_3 + c_1 c_3 + e_1 e_3 &= B_{1,3}, \\ c_1 c_4 + e_1 e_4 &= B_{1,4}, \\ b_2 b_3 + c_2 c_3 + e_2 e_3 &= B_{2,3}, \\ c_2 c_4 + e_2 e_4 &= B_{2,4}, \\ c_3 c_4 + e_3 e_4 &= B_{3,4}. \end{aligned}$$

Da wir hier zehn Gleichungen und dreizehn unbekannte Gröfsen a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, etc. haben, so sieht man, dafs die Gleichungen (31) blofs drei von x_1, y_1, y_2, y_3, y_4 verschiedene Gröfsen enthalten werden. Um in den Fällen, wenn keiner der Coefficienten B_1, B_2, B_3, B_4 gleich Null ist, sich die Rechnung zu erleichtern, setze man zuerst folgende Gleichungen fest:

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= B_1^{\frac{1}{2}}\alpha_1, \quad b_1 = B_1^{\frac{1}{2}}\beta_1, \quad c_1 = B_1^{\frac{1}{2}}\gamma_1,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad e_1 = B_1^{\frac{1}{2}}\varepsilon_1,\\
a_2 &= B_2^{\frac{1}{2}}\alpha_2, \quad b_2 = B_2^{\frac{1}{2}}\beta_2, \quad c_2 = B_2^{\frac{1}{2}}\gamma_2,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad e_2 = B_2^{\frac{1}{2}}\varepsilon_2,\\
&\qquad\quad b_3 = B_3^{\frac{1}{2}}\beta_3, \quad c_3 = B_3^{\frac{1}{2}}\gamma_3,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad e_3 = B_3^{\frac{1}{2}}\varepsilon_3,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad c_4 = B_4^{\frac{1}{2}}\gamma_4,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad e_4 = B_4^{\frac{1}{2}}\varepsilon_4,
\end{aligned}\right\}(32)$$

wodurch die vorhergehenden Gleichungen in folgende übergehen:

$$\begin{aligned}
\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 + \varepsilon_1^2 &= 1,\\
\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 + \varepsilon_2^2 &= 1,\\
\beta_3^2 + \gamma_3^2 + \varepsilon_3^2 &= 1,\\
\gamma_4^2 + \varepsilon_4^2 &= 1,\\
\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 &= \frac{B_{1,2}}{\sqrt{B_1 B_2}},\\
\beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 + \varepsilon_1\varepsilon_3 &= \frac{B_{1,3}}{\sqrt{B_1 B_3}},\\
\gamma_1\gamma_4 + \varepsilon_1\varepsilon_4 &= \frac{B_{1,4}}{\sqrt{B_1 B_4}},\\
\beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 &= \frac{B_{2,3}}{\sqrt{B_2 B_3}},\\
\gamma_2\gamma_4 + \varepsilon_2\varepsilon_4 &= \frac{B_{2,4}}{\sqrt{B_2 B_4}},\\
\gamma_3\gamma_4 + \varepsilon_3\varepsilon_4 &= \frac{B_{3,4}}{\sqrt{B_3 B_4}}.
\end{aligned}$$

Setzt man, um diese Gleichungen bequemer auflösen zu können,

$$\alpha_1 = \cos. p_1, \quad \beta_1 = \sin. p_1 \cos. q_1, \quad \gamma_1 = \sin. p_1 \sin. q_1 \cos. r_1,$$
$$\alpha_2 = \cos. p_2, \quad \beta_2 = \sin. p_2 \cos. q_2, \quad \gamma_2 = \sin. p_2 \sin. q_2 \cos. r_2,$$
$$\beta_3 = \cos. p_3, \quad \gamma_3 = \sin. p_3 \cos. q_3,$$
$$\gamma_4 = \cos. p_4,$$

so geben die vier ersten der vorhergehenden Gleichungen

$$\varepsilon_1 = \sin. p_1 \sin. q_1 \sin. r_1,$$
$$\varepsilon_2 = \sin. p_2 \sin. q_2 \sin. r_2,$$
$$\varepsilon_3 = \sin. p_3 \sin. q_3,$$
$$\varepsilon_4 = \sin. p_4,$$

und die sechs letzten derselben Gleichungen gehen in folgende über:

$$\cos. p_1 \cos. p_2 + \sin. p_1 \sin. p_2 \left[\cos. q_1 \cos. q_2 + \sin. q_1 \sin. q_2 \cos.(r_2 - r_1)\right] = \frac{B_{1,2}}{\sqrt{B_1 B_2}}$$

$$\sin. p_1 \left[\cos. p_3 \cos. q_1 + \sin p_3 \sin. q_1 \cos.(q_3 - r_1)\right] = \frac{B_{1,3}}{\sqrt{B_1 B_3}}$$

$$\sin. p_1 \sin. q_1 \cos.(p_4 - r_1) = \frac{B_{1,4}}{\sqrt{B_1 B_4}}$$

$$\sin. p_2 \left[\cos. p_3 \cos. q_2 + \sin. p_3 \sin. q_2 \cos.(q_3 - r_2)\right] = \frac{B_{2,3}}{\sqrt{B_2 B_3}}$$

$$\sin. p_2 \sin. q_2 \cos.(p_4 - r_2) = \frac{B_{2,4}}{\sqrt{B_2 B_4}}$$

$$\sin. p_3 \cos.(p_4 - q_3) = \frac{B_{3,4}}{\sqrt{B_3 B_4}}$$

Drückt man nun aus diesen sechs Gleichungen sechs der Gröfsen p_1, p_2, p_3, p_4, q_1, q_2, q_3, r_1, r_2 als Functionen der drei übrigen aus, so sind, wenn man diese drei noch übrig bleibenden oder willkürlichen Gröfsen durch p_1, q_1, r_1 bezeichnet, sämmtliche Grössen α_1, α_2, α_3, etc. als Functionen von p_1, q_1, r_1 und x_1, y_1, y_2, y_3, y_4 gegeben.

Man findet dann mit Hülfe der Gleichungen (32) die Coefficienten a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, c_4, e_1, e_2,

e_3, e_4 ebenfalls als Functionen derselben Gröſsen, welche dann, in die Gleichungen (31) substituirt, die verlangten vier linearen Differenzialgleichungen mit den drei neuen Variablen darbieten.

Enthält aber die vorgelegte Differenzialgleichung (30) bloſs die zweiten Potenzen der Differenzialien der Variablen, dann gehen die vorhergehenden Gleichungen in folgende über:

$$\cos. p_1 \cos. p_2 + \sin. p_1 \sin. p_2 [\cos. q_1 \cos. q_2 + \sin. q_1 \sin. q_2 \cos. (r_2 - r_1)] = 0,$$
$$\sin. p_1 [\cos. p_3 \cos. q_1 + \sin. p_3 \sin\ q_1 \cos. (q_3 - r_1)] = 0,$$
$$\sin. p_1 \sin. q_1 \cos. (p_4 - r_1) = 0,$$
$$\sin. p_2 [\cos. p_3 \cos. q_2 + \sin. p_3 \sin. q_2 \cos. (q_3 - r_2)] = 0,$$
$$\sin. p_2 \sin. q_2 \cos. (p_4 - r_2) = 0,$$
$$\sin. p_3 \cos. (p_4 - q_3) = 0.$$

Die dritte, fünfte und sechste dieser Gleichungen geben

$$r_1 = \frac{\pi}{2} + p_4,$$
$$r_2 = \frac{\pi}{2} + p_4,$$
$$q_3 = \frac{\pi}{2} + p_4,$$

und die drei übrigen derselben Gleichungen gehen daher in folgende über:

$$\cos. p_1 \cos. p_2 + \sin. p_1 \sin. p_2 \cos. (q_1 - q_2) = 0,$$
$$\sin. p_1 \cos. (q_1 - p_3) = 0,$$
$$\sin. p_2 \cos. (q_2 - p_3) = 0.$$

Die zwei letzten dieser Gleichungen geben

$$q_1 = \frac{\pi}{2} + p_3,$$
$$q_2 = \frac{\pi}{2} + p_3,$$

und die erste derselben gibt daher

$$\cos.(p_1 - p_2) = 0$$

oder

$$p_1 = \frac{\pi}{2} + p_2.$$

Man hat also

$$\alpha_1 = -\sin.p_2,\quad \beta_1 = -\cos.p_2\ \sin.p_3,$$
$$\gamma_1 = -\cos.p_2\ \cos.p_3\ \sin.p_4,$$
$$\varepsilon_1 = \cos.p_2\ \cos.p_3\ \cos.p_4,$$
$$\alpha_2 = \cos.p_2,\quad \beta_2 = -\sin.p_2\ \sin.p_3,$$
$$\gamma_2 = -\sin.p_2\ \cos.p_3\ \sin.p_4,$$
$$\varepsilon_2 = \sin.p_2\ \cos.p_3\ \cos.p_4,$$
$$\beta_2 = \cos.p_3,$$
$$\gamma_3 = -\sin.p_3\ \sin.p_4,$$
$$\varepsilon_3 = \sin.p_3\ \cos.p_4,$$
$$\gamma_4 = \cos.p_4,$$
$$\varepsilon_4 = \sin.p_4.$$

Setzt man hier statt p_2, $180^0 - p_1$, statt p_3, $90^0 + q_1$, statt p_4, $90^0 + r_1$, und berücksichtiget man die Gleichungen (32), so gehen die Gleichungen (31) in folgende über:

$$0 = B_1^{\frac{1}{2}} \sin.p_1\ dy_1$$
$$+ B_2^{\frac{1}{2}} \cos.p_1\ dy_2,$$

$$0 = B_1^{\frac{1}{2}} \cos.p_1\ \cos.q_1\ dy_1$$
$$- B_2^{\frac{1}{2}} \sin.p_1\ \cos.q_1\ dy_2$$
$$- B_3^{\frac{1}{2}} \sin.q_1\ dy_3,$$

$$0 = B_1^{\frac{1}{2}} \cos.p_1\ \sin.q_1\ \cos.r_1\ dy_1$$
$$- B_2^{\frac{1}{2}} \sin.p_1\ \sin.q_1\ \cos.r_1\ dy_2$$
$$+ B_3^{\frac{1}{2}} \cos.q_1\ \cos.r_1\ dy_3$$
$$+ B_4^{\frac{1}{2}} \sin.r_1\ dy_4,$$

$$dx_1 = - B_1^{\frac{1}{2}} \cos. p_1 \sin. q_1 \sin. r_1 \, dy_1$$
$$+ B_2^{\frac{1}{2}} \sin. p_1 \sin. q_1 \sin. r_1 \, dy_2$$
$$- B_3^{\frac{1}{2}} \cos. q_1 \sin. r_1 \, dy_3$$
$$+ B_4^{\frac{1}{2}} \cos. r_1 \, dy_4 .$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen p_1, q_1, r_1, so erhält man folgende Differenzialgleichung

$$dx_1^2 = B_1 dy_1^2 + B_2 dy_2^2 + B_3 dy_3^2 + B_4 dy_4^2 .$$

Aus dieser Differenzialgleichung kann man übrigens auch auf einem andern Wege zu denselben vier linearen Differenzialgleichungen gelangen: man multiplicire nämlich in dem Theile rechts derselben was immer für zwei Glieder mit $\cos. p_1^2 + \sin. p_1^2$, so wird hierdurch die Gleichheit nicht gestört; sind diese zwei multiplicirten Glieder $B_1 dy_1^2 + B_2 dy_2^2$, so hat man wegen

$$(B_1 dy_1^2 + B_2 dy_2^2)(\cos. p^2 + \sin. p^2) =$$
$$= (B_1^{\frac{1}{2}} \sin. p_1 \, dy_1 + B_2^{\frac{1}{2}} \cos. p_1 \, dy_2)^2$$
$$+ (B_1^{\frac{1}{2}} \cos\, p_1 \, dy_1 - B_2^{\frac{1}{2}} \sin. p_1 \, dy_2)^2$$

statt der vorgelegten Differenzialgleichung folgende:

$$dx_1^2 = (B_1^{\frac{1}{2}} \sin. p_1 \, dy_1 + B_2^{\frac{1}{2}} \cos. p_1 \, dy_2)^2$$
$$+ (B_1^{\frac{1}{2}} \cos. p_1 \, dy_1 - B_2^{\frac{1}{2}} \sin. p_1 \, dy_2)^2$$
$$+ B_3 dy_3^2 + B_4 dy_4^2 .$$

Da nun der Winkel p_1 ganz willkürlich ist, kann man über ihn dergestalt verfügen, daſs man folgende Gleichung festsetzt:

$$0 = B_1^{\frac{1}{2}} \sin. p_1 \, dy_1 + B_2^{\frac{1}{2}} \cos. p_1 \, dy_2 , \quad . \quad \text{(I.)}$$

und die vorhergehende Gleichung geht, wenn man

$$B_1^{\frac{1}{2}} \cos. p_1 \, dy_1 - B_2^{\frac{1}{2}} \sin. p_1 \, dy_2 = C_1$$

setzt, in folgende über:

$$dx_1^2 = C_1^2 + B_3 dy_3^2 + B_4 dy_4^2.$$

Multiplicirt man abermals die Glieder $C_1^2 + B_3 dy_3^2$ mit $\cos. q_1^2 + \sin. q_1^2$, so wird ebenfalls die Gleichheit nicht gestört, und die letzte Gleichung geht daher in folgende über:

$$dx_1^2 = (C_1 \sin. q_1 + B_3^{\frac{1}{2}} \cos. q_1 \, dy_3)^2$$
$$+ (C_1 \cos. q_1 - B_3^{\frac{1}{2}} \sin. q_1 \, dy_3)^2 + B_4 dy_4^2.$$

Weil hier der Winkel q_1 willkürlich ist, kann man auch folgende Gleichung festsetzen:

$$o = C_1 \cos. q_1 - B_3^{\frac{1}{2}} \sin. q_1 \, dy_3, \quad . \quad . \quad \text{(II.)}$$

und die vorhergehende Gleichung geht, wenn man

$$C_1 \sin. q_1 + B_3^{\frac{1}{2}} \cos. q_1 \, dy_3 = C_2$$

setzt, in folgende über:

$$dx_1^2 = C_2^2 + B_4 dy_4^2.$$

Multiplicirt man endlich den Theil rechts mit $\cos. r_1^2 + \sin. r_1^2$, so geht diese Gleichung in folgende über:

$$dx_1^2 = (C_2 \sin. r_1 + B_4^{\frac{1}{2}} \cos. r_1 \, dy_4)^2$$
$$+ (C_2 \cos. r_1 - B_4^{\frac{1}{2}} \sin. r_1 \, dy_4)^2;$$

wenn hier endlich

$$o = C_2 \cos. r_1 - B_4^{\frac{1}{2}} \sin. r_1 \, dy_4 \quad . \quad . \quad \text{(III.)}$$

gesetzt wird, so hat man

$$dx_1 = C_2 \sin. r_1 + B_4^{\frac{1}{2}} \cos. r_1 \, dy_4 \quad . \quad \text{(IV.)}$$

Die Gleichungen (I.), (II.), (III.), (IV.) sind mit den oben aufgestellten vier linearen Differenzialgleichungen identisch, wenn man in (II.), (III.), (IV.) die Werthe von C_1, C_2 restituirt.

Wenn die im Anfange dieses Paragraphs vorgelegte Differenzialgleichung (30) so beschaffen ist, dafs die Variable x_1 in dem Theile rechts derselben blofs als gemeinschaftlicher Factor erscheint, dann kann man ihr durch Einführung von drei neuen Variablen z_1, z_2, z_3 folgende Form geben:

$$dx_1^2 = Y_1 dy_1^2 + Z_1 dz_1^2 + Z_2 dz_2^2 + Z_3 dz_3^2$$
$$+ 2(Z_{1,2} dz_1 dz_2 + Z_{1,3} dz_1 dz_3)$$
$$+ 2 Z_{2,3} dz_2 dz_3,$$

welche Gleichung, wie aus dem Frühern erhellet, viel leichter in ein System von vier linearen Differenzialgleichungen aufgelöst werden kann.

Enthalten ferner in der letzten Gleichung die Coefficienten Z_1, Z_2, Z_3, $Z_{1,2}$, $Z_{1,3}$, $Z_{2,3}$ die Variablen x_1, y_1 blofs als gemeinschaftlichen Factor, so kann man ihr auch folgende Form geben:

$$dx_1^2 = Y_1 dy_1^2 + Z_1 dz_1^2 + U_1 du_1^2 + U_2 du_2^2$$
$$+ 2 U_{1,2} du_1 du_2;$$

und wenn endlich die Coefficienten U_1, $U_{1,2}$ oder U_2, $U_{1,2}$ die Variablen x_1, y_1, z_1 blofs als gemeinschaftlichen Factor mit sich führen, kann man sie auch in folgende umsetzen:

$$dx_1^2 = Y_1 dy_1^2 + Z_1 dz_1^2 + U_1 du_1^2 + V_1 dv_1^2,$$

welche Gleichung sehr leicht in vier lineare Differenzialgleichungen zerfällt werden kann.

Dritte Abtheilung.

Über die Integration der in der vorhergehenden Abtheilung gefundenen $n-1$ linearen Differenzialgleichungen oder der Differenzialgleichung (B).

§. 11.

In dieser Abtheilung will ich bloſs einige specielle Differenzialgleichungen mit drei, vier, fünf Variablen integriren, aus welchen man zur Genüge ersehen wird, wie in jedem andern Falle zu verfahren sey.

Man habe also, um mit einem einfachen Falle den Anfang zu machen, folgende Differenzialgleichung gegeben:

$$dx_1^2 = A^2 (dy_1^2 + dy_2^2), \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

wo A irgend eine Constante vorstellt.

Vermöge den Gleichungen (18) zerfällt diese in folgende zwei lineare Differenzialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \sin.p_1\, dy_1 + \cos.p_1\, dy_2, \\ dx_1 &= A\cos.p_1\, dy_1 - A\sin.p_1\, dy_2. \end{aligned}\right\} \quad . \quad (b)$$

Nun wollen wir die zweite dieser Gleichungen, als für sich allein bestehend, integriren. Zuerst bringe man sie nach *Pfaff's* Verfahren, gewöhnliche lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung zu integriren, auf eine andere, die bloſs drei Variable enthält. Dieses wird erreicht, wenn man

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= a, \\ y_1 &= \frac{x_1 \cos. a}{A} + b, \\ y_2 &= -\frac{x_1 \sin. a}{A} + c \end{aligned}\right| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

setzt, wo a, b, c die neuen Variablen vorstellen.

Durch Differenziation der beiden letzten dieser

Gleichungen erhält man

$$dy_1 = \frac{\cos. a}{A} dx_1 - \frac{x_1 \sin. a}{A} da + db,$$

$$dy_2 = -\frac{\sin. a}{A} dx_1 - \frac{x_1 \cos. a}{A} da + dc.$$

Substituirt man diese Werthe in die zweite der Gleichungen (b), so geht sie nach allen Reductionen in folgende über:

$$\sin. a \,.\, dc - \cos. a \,.\, db = o.$$

Diese Differenzialgleichung, welche bloſs die drei Variablen a, b, c enthält, wird durch das System folgender zwei Gleichungen integrirt:

$$c \sin. a - b \cos. a = \varphi(a),$$
$$c \cos. a + b \sin. a = \varphi'(a),$$

wo $\varphi(a)$ eine jede willkürliche Function von a vorstellt, und $\varphi'(a)$ statt $\frac{d \cdot \varphi(a)}{da}$ gesetzt worden ist.

Substituirt man in diese Gleichungen die Werthe von a, b, c, welche aus den Gleichungen (c) folgen, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_1}{A} - y_1 \cos. p_1 + y_2 \sin. p_1 &= \varphi(p_1), \\ y_1 \sin. p_1 + y_2 \cos. p_1 &= \varphi'(p_1), \end{aligned}\right\} \quad \text{(d)}$$

welche Gleichungen die Integralien der zweiten der Differenzialgleichungen (b) vorstellen.

Um nun auch der ersten der Differenzialgleichungen (b) Genüge zu thun, differenzire man die zweite der zuletzt aufgestellten Gleichungen, so hat man

$$\sin. p_1 \, dy_1 + \cos. p_1 \, dy_2$$
$$+ [y_1 \cos. p_1 - y_2 \sin. p_1 - \varphi''(p_1)] \, dp_1 = o,$$

wo $\varphi''(p_1)$ statt $\frac{d^2 \varphi(p_1)}{dp_1^2}$ gesetzt worden ist.

Vergleicht man diese Gleichung mit der ersten der

Gleichungen (b), so erhält man

$$[y_1 \cos. p_1 - y_2 \sin. p_1 - \varphi''(p_1)]\, dp_1 = o,$$

welcher Gleichung Genüge geschieht, wenn man entweder

$$dp_1 = o$$

annimmt, oder folgende Gleichung festsetzt:

$$y_1 \cos. p_1 - y_2 \sin. p_1 = \varphi''(p_1),$$

Die erste Annahme gibt

$$p_1 = \text{Const.} = a,$$

wodurch die Gleichungen (d) in folgende übergehen:

$$\frac{x_1}{A} - y_1 \cos. a + y_2 \sin. a = \varphi(a),$$
$$y_1 \sin. a + y_2 \cos. a = \varphi'(a),$$

welche Gleichungen den beiden Differenzialgleichungen (b), folglich auch der Gleichung (a) Genüge thun.

Die zweite Anuahme hingegen gibt, in Vereinigung mit den Gleichungen (d), folgende Bestimmungen für x_1, y_1, y_2:

$$x_1 = A[\varphi(p_1) + \varphi''(p_1)],$$
$$y_1 = \sin. p_1 \varphi'(p_1) + \cos. p_1 \varphi''(p_1),$$
$$y_2 = \cos. p_1 \varphi'(p_1) - \sin. p_1 \varphi''(p_1),$$

in welchen Gleichungen p_1 eine Variable vorstellen kann. Denkt man sich aus denselben p_1 eliminirt, so erhält man ein System zweier Gleichungen, die die allgemeinsten Integralien der vorgelegten Differenzialgleichung (a) vorstellen.

Für den Fall, wo $A = 1$ ist, erhält man dieselben Formeln, die *Lagrange* bei der Integration derselben Differenzialgleichung gefunden hat.

Uebrigens ersieht man auch, dafs im letztern Falle die hier angegebenen Formeln dazu dienen können, die rectificabeln ebenen Curven anzugeben.

§. 12.

Man habe ferner folgende von *Monge* integrirte Differenzialgleichung:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{r^2}{z^2}(dx^2 + dy^2).$$

Nach der von uns bis jetzt gebrauchten Bezeichnungsart wird diese Differenzialgleichung folgende Gestalt annehmen:

$$dx_2^2 = \frac{r^2 - x_1^2}{x_1^2} dy_1^2 + \frac{r^2 - x_1^2}{x_1^2} dy_2^2 \quad . \quad . \quad \text{(a)}$$

Mit Hülfe der Gleichungen (18) zerfällt diese Differenzialgleichung in folgende zwei lineare:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \sin.p_1\, dy_1 + \cos.p_1\, dy_2, \\ dx_1 &= \frac{\sqrt{r^2 - x_1^2}}{x_1}\left[\cos.p_1\, dy_1 - \sin.p_1\, dy_2\right]. \end{aligned}\right\} . \text{(b)}$$

Um die zweite dieser Gleichungen zu integriren, setze man nach *Pfaff*

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= a, \\ y_1 &= -\cos.a\sqrt{r^2 - x_1^2} + b, \\ y_2 &= \sin.a\sqrt{r^2 - x_1^2} + c, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad \text{(c)}$$

wo a, b, c drei neue Variable vorstellen.

Differenzirt man diese Gleichungen, und substituirt die erhaltenen Werthe für dy_1, dy_2 in die zweite der Gleichungen (b), so geht sie in folgende über:

$$\sin.a \,.\, dc - \cos.a \,.\, db = 0.$$

Diese Gleichung integrirt gibt

$$c \sin.a - b \cos.a = \varphi(a),$$
$$c \cos.a + b \sin.a = \varphi'(a),$$

und wenn in denselben die Werthe für a, b. c, welche aus den Gleichungen (c) folgen, substituirt werden, erhält man folgende zwei Integralgleichungen

$$\left.\begin{aligned} -\sqrt{r^2 - x_1^2} - y_1 \cos. p_1 + y_2 \sin. p_1 &= \varphi(p_1) \\ y_1 \sin. p_1 + y_2 \cos. p_1 &= \varphi'(p_1) \end{aligned}\right\} \text{(d)}$$

der zweiten der Differenzialgleichungen (b).

Um auch der ersten der Differenzialgleichungen (b) Genüge zu thun, differenzire man die zweite der so eben gefundenen Integralgleichungen, wodurch man erhält

$$\sin. p_1 \, dy_1 + \cos. p_1 \, dy_2 \\ + [y_1 \cos. p_1 - y_2 \sin. p_1 - \varphi''(p_1)] \, dp_1 = 0;$$

woraus erhellt, daſs auch der ersten der Differenzialgleichungen (b) Genüge geschieht, wenn man entweder

$$dp_1 = 0$$

oder

$$y_1 \cos. p_1 - y_2 \sin. p_1 = \varphi''(p_1)$$

festsetzt. Die erstere Annahme erklärt p_1 als eine Constante, und die Gleichungen (d) stellen dann unter dieser Voraussetzung die Integralien der beiden Gleichungen (b) oder der vorgelegten Differenzialgleichung (a) vor.

Die zweite Annahme hingegen bietet folgende drei Integralgleichungen dar:

$$\begin{aligned} -\sqrt{r^2 - x_1^2} - y_1 \cos. p_1 + y_2 \sin. p_1 &= \varphi(p_1), \\ y_1 \sin. p_1 + y_2 \cos. p_1 &= \varphi'(p_1), \\ y_1 \cos. p_1 - y_2 \sin. p_1 &= \varphi''(p_1), \end{aligned}$$

aus welchen, da p_1 variabel ist, diese Gröſse eliminirt werden muſs.

§. 13.

Als letztes Beispiel für drei Variable will ich noch von folgender Differenzialgleichung

$$dx_1^2 = x_1^2 \, dy_1^2 + y_1^2 \, dy_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad \text{(a)}$$

die Integralien aufsuchen.

Nach den Gleichungen (18) zerfällt diese in folgende zwei lineare:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= x_1 \sin. p_1\, dy_1 + y_2 \cos. p_1\, dy_2, \\ dx_1 &= x_1 \cos. p_1\, dy_1 - y_2 \sin. p_1\, dy_2. \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Die zweite dieser Differenzialgleichungen wird nach *Pfaff's* Methode durch Festsetzung folgender Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b \operatorname{tang}. p_1, \\ y_1 &= \log. a \operatorname{tang}. \frac{p_1}{2}, \\ y_2^2 &= -\frac{2b}{\cos. p_1} + c, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad , \quad . \quad (c)$$

wo a, b, c drei neue Variable vorstellen, in folgende blofs drei Variable enthaltende lineare Differenzialgleichung

$$dc - 2b \frac{da}{a} = 0$$

umgesetzt.

Integrirt man diese Differenzialgleichung, so erhält man

$$c - 2b \log. a = \varphi(b),$$
$$-2 \log. a = \varphi'(b).$$

Wenn nun für a, b, c die Werthe, welche aus den Gleichungen (c) folgen, gesetzt werden, so sind die Integralien der zweiten der Gleichungen (b) folgende:

$$y_2^2 + \frac{2x_1}{\sin. p_1} - 2x_1 \operatorname{Cotang}. p_1 \left[y_1 - \log. \operatorname{tang}. \frac{p_1}{2}\right] =$$
$$= \varphi(x_1 \operatorname{Cotang}. p_1),$$
$$-2\left[y_1 - \log. \operatorname{tang}. \frac{p_1}{2}\right] = \varphi'(x_1 \operatorname{Cotang}. p_1).$$

Um auch der ersten der Differenzialgleichungen (b) Genüge zu thun, differenzire man die zweite der so eben gefundenen Gleichungen nach allen Gröfsen, die sie enthält, so erhält man:

$$-2\,dy_1 + 2\frac{dp_1}{\sin.p_1} =$$

$$= \left[\text{Cotang.}\,p_1\,dx_1 - \frac{x_1\,dp_1}{\sin.p_1^2}\right]\varphi''(x_1\,\text{Cotang.}\,p_1).$$

Substituirt man in diese Gleichung den Werth von dy_1, der aus der ersten der Differenzialgleichungen (b) folgt, so erhält man nach allen Reductionen folgende Gleichung:

$$\left(\frac{\cos.p_1\,dx_1}{x_1} - \frac{dp_1}{\sin.p_2}\right)\left[\frac{2}{x_1} + \frac{\varphi''(x_1\,\text{Cotang.}\,p_1)}{\sin\,p_1}\right] = 0.$$

Hieraus folgt, daſs man entweder

$$\frac{\cos.p_1}{x_1}\,dx_1 - \frac{dp_1}{\sin.p_1} = 0$$

oder

$$\frac{2}{x_1} + \frac{\varphi''(x_1\,\text{Cotang.}\,p_1)}{\sin.x_1} = 0$$

haben muſs.

Die erste Annahme gibt durch Integration

$$x_1\,\text{Cotang.}\,p_1 = \text{Const.} = a,$$

folglich sind die Integralien der vorgelegten Differenzialgleichung (a) entweder

$$y_1^2\sin.p_1 + 2x_1\left\{1 - \cos.p_1\left[y_1 - \log.\text{tang.}\frac{p_1}{2}\right]\right\} =$$
$$= \sin.p_1\,\varphi\,(x_1\,\text{Cotang.}\,p_1),$$

$$2\left[y_1 - \log.\text{tang.}\frac{p_1}{2}\right] = -\varphi'(x_1\,\text{Cotang.}\,p_1),$$

$$2\sin.p_1 = -x_1\,\varphi''(x_1\,\text{Cotang.}\,p_1)$$

oder

$$y_1 = -\tfrac{1}{2}\varphi'(a) + \log.\left(\frac{-a+\sqrt{a^2+x_1^2}}{x_1}\right),$$

$$y_1^2 = \varphi(a) - a\,\varphi'(a) - 2\sqrt{a^2+x_1^2},$$

wo aus den erstern Integralien die neu eingeführte Variable p_1 eliminirt werden muſs.

§. 14.

Als Beispiel von vier Variablen will ich zuerst die Integralien von folgender Differenzialgleichung

$$dx_1^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2 \quad . \quad . \quad . \quad \text{(a)}$$

entwickeln.

Nach den Gleichungen (25) zerfällt sie in folgende drei lineare Differenzialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} o &= \cos. p_1 \, dy_1 + \sin. p_1 \, dy_2, \\ o &= \sin. p_1 \cos. q_1 \, dy_1 - \cos. p_1 \cos. q_1 \, dy_2 \\ &\qquad - \sin. q_1 \, dy_3, \\ dx_1 &= \sin. p_1 \sin. q_1 \, dy_1 - \cos. p_1 \sin. q_1 \, dy_2 \\ &\qquad + \cos. q_1 \, dy_3. \end{aligned}\right\} \; . \; \text{(b)}$$

Die letzte dieser Gleichungen, welche sechs Variable enthält, kann man nach *Pfaff's* Methode in eine andere ebenfalls lineare transformiren, die blofs fünf Variable enthält. Dieses wird erreicht, wenn man folgende Gleichungen festsetzt:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \quad x_1 \sin. a \sin. b + g, \\ y_2 &= - x_1 \cos. a \sin. b + e, \\ y_3 &= x_1 \cos. b + c, \\ p_1 &= a, \\ q_1 &= b, \end{aligned}\right\} \; . \; . \; \text{(c)}$$

wo a, b, c, e, g die neuen Variablen sind.

Führt man diese Werthe in der letzten der Gleichungen (b) ein, so erhält man folgende Differenzialgleichung:

$$o = \cos. b \, dc - \cos. a \sin. b \, de + \sin. a \sin. b \, dg, \quad \text{(d)}$$

die, wie man sieht, blofs fünf Variable enthält.

In dieser Differenzialgleichung wird ferner nach *Pfaff* eine der Variablen einstweilen als constant betrachtet. Nennen wir b diese constante, so geht die letzte Gleichung durch Festsetzung folgender Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} e &= \frac{c \cos . a'}{\text{tang}. b} + c', \\ g &= -\frac{c \sin . a'}{\text{tang}. b} + b', \\ a &= a' \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

in folgende über:

$$o = \cos . a' \, d c' - \sin . a' \, d b' .$$

Da hier blofs die drei Variablen a', b', c' enthalten sind, so wird sie durch das System folgender zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} c' \cos . a' - b' \sin . a' &= \varphi(a'), \\ c' \sin . a' + b' \cos . a' &= - \varphi'(a') \end{aligned}$$

integrirt, in welchen $\varphi(a')$ eine willkürliche Function von a vorstellt, und $\varphi'(a')$ statt $\frac{d . \varphi(a')}{d a'}$ gesetzt worden ist.

Substituirt man in die letzten zwei Gleichungen die Werthe von a', b', c', welche aus den Gleichungen (e) folgen, so gehen sie in folgende über:

$$\begin{aligned} - c \, \text{Cotang}. b + e \cos . a - g \sin . a &= \varphi(a), \\ e \sin . a + g \cos . a &= - \varphi'(a). \end{aligned}$$

Diese zwei Gleichungen stellen die Integralien der Differenzialgleichung (d) unter der Voraussetzung dar, dafs b constant sey. Nun ist aber b ebenfalls variabel, daher wird die willkürliche Function φ aufser a auch b enthalten müssen. Es werden mithin die Integralien der Differenzialgleichung (d) folgende seyn:

$$\begin{aligned} - a \, \text{Cotang}. b + e \cos . a - g \sin . a &= \varphi(a, b), \\ e \sin . a + g \cos . a &= - \varphi'(a), \\ e &= \sin . b^2 \, \varphi'(b), \end{aligned}$$

wo $\varphi'(a)$, $\varphi'(b)$ statt $\frac{d . \varphi(a, b)}{d a}$, $\frac{d . \varphi(a, b)}{d b}$ gesetzt worden sind.

Setzt man nun in die letzten drei Gleichungen statt a, b, c, e, g ihre Werthe, welche aus den Gleichungen (c) folgen, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{x_1 - y_3 \cos. q_1}{\sin. q_1} + y_2 \cos. p_1 - y_1 \sin. p_1 = \varphi(p, q), \\ y_2 \sin. p_1 + y_1 \cos. p_1 = -\varphi'(p), \\ \frac{y_3 - x_1 \cos. q_1}{\sin. q_1^2} = \varphi'(q), \end{array}\right\} \text{(f)}$$

welche drei Gleichungen die Integralien der dritten der Differenzialgleichungen (b) vorstellen.

Um auch den beiden ersten der Differenzialgleichungen (b) Genüge zu thun, suche man aus den so eben aufgestellten drei Integralgleichungen die Werthe von y_1, y_2, y_3; diese geben:

$$y_1 = x_1 \sin. p_1 \sin. q_1 - \cos. p_1 \varphi'(p_1)$$
$$- \sin. p_1 \sin. q_1 \cos. q_1 \varphi'(q_1) - \sin. p_1 \varphi(p_1, q_1),$$
$$y_2 = - x_1 \cos. p_1 \sin. q_1 - \sin. p_1 \varphi'(p_1)$$
$$+ \cos. p_1 \sin. q_1 \cos. q_1 \varphi'(q_1) + \cos. p_1 \varphi(p_1, q_1),$$
$$y_3 = x_1 \cos. q_1 + \sin. q_1^2 \varphi'(q_1).$$

Differenzirt man diese Gleichungen, und substituirt die sich ergebenden Werthe für dy_1, dy_2, dy_3 in die beiden ersten der Differenzialgleichungen (b), so gehen sie in folgende über:

$$[x_1 \sin. q_1 - \varphi''(p_1) - \sin. q_1 \cos. q_1 \varphi'(q_1) - \varphi(p_1, q_1)]\, dp_1 =$$
$$= \varphi''(p_1, q_1)\, dq_1,$$
$$[x_1 - 2 \cos. q_1 \varphi'(q_1) - \sin. q_1 \varphi''(q_1)]\, dq_1 =$$
$$= \sin. q_1 \varphi''(p_1, q_1)\, dq_1,$$

wo der Kürze wegen $\varphi''(p_1)$, $\varphi''(p_1, q_1)$, $\varphi''(q_1)$ der Ordnung nach statt $\frac{d^2 \varphi(p_1, q_1)}{dp_1^2}$, $\frac{d^2 \varphi(p_1, q_1)}{dp_1\, dq_1}$, $\frac{d^2 \varphi(p_1, q_1)}{dq_1^2}$ gesetzt worden ist.

Diese Gleichungen können nur in so ferne zugleich bestehen, als folgende von jedem Differenziale befreite Gleichung

$$\left.\begin{array}{l}\sin. q_1 \varphi''(p_1, q_1)^2 = \\ =[x_1 \sin. q_1 - \varphi''(p_1) - \sin. q_1 \cos. q_1 \varphi'(q_1) - \varphi(p_1, q_1)] \times \\ \times [x_1 - 2\cos. q_1 \varphi'(q_1) - \sin. q_1 \varphi''(q_1)]\end{array}\right\} (g)$$

besteht. Eliminirt man nun aus dieser Gleichung und einer der beiden vorhergehenden Differenzialgleichungen die Variable x_1, so erhält man:

$$\varphi''(p_1, q_1)[\sin. q_1^2 \, dp_1^2 - dq_1^2]$$
$$+ [\sin. q_1 \cos. q_1 \varphi'(q_1) + \sin. q_1^2 \varphi''(q_1)$$
$$- \varphi''(p_1) - \varphi(p_1, q_1)] \, dp_1 \, dq_1 = 0.$$

Die Gleichungen (f), vereinigt mit den beiden letzten Gleichungen, werden sämmtlichen Differenzialgleichungen (b) Genüge thun; allein die zweite dieser letzten Gleichungen ist noch eine Differenzialgleichung zwischen den beiden Variablen p_1, q_1, und erfordert mithin noch eine Integration, um zu den endlichen Integralien der vorgelegten Differenzialgleichung zu gelangen. Diese Integration kann man aber so lange, als über die willkürliche Function $\varphi(p_1, q_1)$ nicht entschieden wird, auch nicht bewerkstelligen, daher ich an ein Verfahren denken mufste, wie mit dieser Differenzialgleichung umzugehen wäre. Ich substituire nämlich die aus den Gleichungen (f) folgenden Werthe von y_1, y_2, y_3, wie auch die Werthe ihrer Differenzialien in die vorgelegte Differenzialgleichung (a), dadurch finde ich nach allen Reductionen folgende Differenzialgleichung:

$$0 = \{[x_1 \sin. q_1 - \varphi''(p_1) - \sin. q_1 \cos. q_1 \varphi'(q_1) - \varphi(p_1, q_1)] dp_1$$
$$- \varphi''(p_1, q_1) \, dq_1\}^2$$
$$+ \{[x_1 - 2\cos. q_1 \varphi'(q_1) - \sin. q_1 \varphi''(q_1)] \, dq_1$$
$$- \sin. q_1 \varphi''(p_1, q_1) \, dp_1\}^2.$$

Wenn die Gleichungen (f) die Integralien der vorgelegten Differenzialgleichung (a) wären, dann müfste die letzte Gleichung eine identische seyn; da dieses aber nicht Statt findet, so führe ich die früher gefundene

Gleichung (f) ein, wodurch die letzte Gleichung in folgende übergeht:

$$o = \left([x_1 - 2\cos.q_1\,\varphi'(q_1) - \sin.q_1\,\varphi''(q_1)]\,dq_1 \right.$$
$$\left. - \sin.q_1\,\varphi''(p_1, q_1)\,dp_1\right)^2 \times$$
$$\times \left([x_1 - 2\cos.q_1\,\varphi'(q_1) - \sin.q_1\,\varphi''(q_1)]^2 \right.$$
$$\left. + \varphi''(p_1, q_1)^2\right).$$

Da diese Gleichung identisch werden soll, so ist es gleichgültig, welche der Factoren man verschwinden läſst; der erste Factor gleich Null gesetzt, gibt eine der beiden früher gefundenen Differenzialgleichungen, und erzeugt mithin nichts Neues. Hingegen der zweite Factor gleich Null gesetzt, gibt

$$[x_1 - 2\cos.q_1\,\varphi'(q_1) - \sin.q_1\,\varphi''(q_1)]^2 + \varphi''(p_1, q_1)^2 = o,$$

woraus man erhält

$$x_1 - 2\cos.q_1\,\varphi'(q_1) - \sin.q_1\,\varphi''(q_1) = \sqrt{-1}\,\varphi''(p_1, q_1).$$

Hierdurch geht die Gleichung (g) in folgende über:

$$x_1 \sin.q_1 - \varphi''(p_1) - \sin.q_1 \cos.q_1\,\varphi'(q_1) - \varphi(p_1, q_1) =$$
$$= -\sqrt{-1}\,\sin.q_1\,\varphi''(p_1, q_1).$$

Diese zwei Gleichungen, vereinigt mit den Gleichungen (f), geben

$$x_1 = 2\cos.q_1\,\varphi'(q_1) + \sin.q_1\,\varphi''(q_1) + \sqrt{-1}\,\varphi''(p_1, q_1),$$
$$y_1 = -\cos.p_1\,\varphi'(p_1) + \sin.p_1\,\varphi''(p_1)$$
$$- \sqrt{-1}\,\sin.p_1 \sin.q_1\,\varphi''(p_1, q_1),$$
$$y_2 = -\sin.p_1\,\varphi'(p_1) - \cos.p_1\,\varphi''(p_1)$$
$$+ \sqrt{-1}\,\cos.p_1 \sin.q_1\,\varphi''(p_1, q_1),$$
$$y_3 = (1 + \cos.q_1^2)\,\varphi'(q_1) + \sin.q_1 \cos.q_1\,\varphi''(q_1)$$
$$+ \sqrt{-1}\,\cos.q_1\,\varphi''(p_1, q_1),$$
$$\varphi(p_1, q_1) + \varphi''(p_1) - \sin.q_1 [\cos.q_1\,\varphi'(q_1)$$
$$+ \sin.q_1\,\varphi''(q_1) + 2\sqrt{-1}\,\varphi''(p_1, q_1)] = o,$$

aus welchen, wenn p_1, q_1 eliminirt werden, ein System

dreier Gleichungen, die eine willkürliche Function mit sich führen, als Integralien der vorgelegten Differenzialgleichung (a) erhalten werden.

§. 15.

Man habe ferner folgende Differenzialgleichung

$$dx_1^2 = dy_1^2 + y_2^2\, dy_2^2 + x_1^2\, dy_3^2 \quad . \quad . \quad \text{(a)}$$

Nach den Gleichungen (25) zerfällt diese in folgende drei lineare:

$$\left.\begin{aligned} o &= \cos.p_1\, dy_1 + y_2 \sin.p_1\, dy_2, \\ o &= \sin.p_1 \cos.q_1\, dy_1 - y_2 \cos.p_1 \cos.q_1\, dy_2 \\ &\qquad - x_1 \sin.q_1\, dy_3, \\ dx_1 &= \sin.p_1 \sin.q_1\, dy_1 - y_2 \cos.p_1 \sin.q_1\, dy_2 \\ &\qquad + x_1 \cos.q_1\, dy_3. \end{aligned}\right\} \text{(b)}$$

Die letzte dieser Differenzialgleichungen wird nach *Pfaff* durch das System folgender Gleichungen integrirt:

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} 2x_1 \text{Cotang.}\, q_1 \left[y_3 - \log.\text{tang.}\,\frac{q_1}{2}\right] - \frac{2\,x_1}{\sin.q_1} \\ + 2y_1 \sin.p_1 - y_1^2 \cos.p_1 \end{aligned}\right\} = \\ &\qquad = \varphi(p_1,\, x_1 \text{Cotang.}\, q_1), \\ &2y_1 \cos.p_1 + y_1^2 \sin.p_1 = \varphi'(p_1), \\ &2\left[y_3 - \log.\text{tang.}\,\frac{q_1}{2}\right] = \varphi'(x_1 \text{Cotang.}\, q_1). \end{aligned}\right\} \text{(c)}$$

Um mit Hülfe dieser gefundenen Integralien auch den beiden ersten der Differenzialgleichungen (b) Genüge zu thun, setzen wir der Kürze wegen

$$x_1 \text{Cotang.}\, q_1 = \nu, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(a')}$$

wodurch die beiden ersten der Gleichungen (b) in folgende übergehen:

$$\left.\begin{aligned} o &= \cos.p_1\, dy_1 + y_2 \sin.p_1\, dy_2, \\ o &= \sin.p_1\, dy_1 - y_2 \cos.p_1\, dy_2 - \nu\, \text{tang.}\, q_1^2\, dy_3, \end{aligned}\right\} \text{(b')}$$

und die gefundenen Integralgleichungen (c) gehen in

folgende über:

$$\left.\begin{aligned} 2\nu\left(y_3 - \frac{1}{\cos. q_1} - \log.\,\mathrm{tang.}\,\frac{q_1}{2}\right) & \\ + 2y_1 \sin. p_1 - y_2^2 \cos. p_1 &= \varphi(p_1, \nu), \\ 2y_1 \cos. p_1 + y_2^2 \sin. p_1 &= \varphi'(p_1), \\ 2\left(y_3 - \log.\,\mathrm{tang.}\,\frac{q_1}{2}\right) &= \varphi'(\nu). \end{aligned}\right\} \quad (c')$$

Sucht man aus diesen Gleichungen die Werthe von y_1, y_2^2, y_3, differenzirt dann die erhaltenen Resultate, und substituirt sie in die Gleichungen (b′), so erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$\left[\frac{2\nu}{\cos. q_1} - \nu\varphi'(\nu) + \varphi''(p_1) + \varphi(p_1, \nu)\right] dp_1 + \varphi''(p_1, \nu)\, d\nu = 0,$$

$$[\nu\varphi''(\nu) - 2\cos. q_1]\, d\nu + \nu\varphi''(p_1, \nu)\, d\nu = 0,$$

welche Gleichungen nur dann zugleich bestehen können, wenn man folgende Gleichung hat

$$\nu\varphi''(p_1, \nu)^2 = [\nu\varphi''(\nu) - 2\cos. q_1] \times \left[\frac{2\nu}{\cos. q_1} - \nu\varphi'(\nu) + \varphi''(p_1) + \varphi(p_1, \nu)\right]. \quad (d')$$

Substituirt man aber dieselben Werthe für dy_1, $y_2\, dy_2$, dy_3, die aus (c′) folgen, in die vorgelegte Differenzialgleichung (a), so geht sie in folgende über:

$$0 = \cos. q_1^2 \left\{\left[\frac{2\nu}{\cos. q_1} - \nu\varphi'(\nu) + \varphi''(p_1) + \varphi(p_1, \nu)\right] dp_1 + \varphi''(p_1, \nu)\, d\nu\right\}^2$$
$$+ \left\{[\nu\varphi''(\nu) - 2\cos. q_1]\, d\nu + \nu\varphi''(p_1, \nu)\, dp_1\right\}^2$$

und mit Berücksichtigung der Gleichung (d) geht sie in folgende über:

$$0 = \left([\nu\varphi''(\nu) - 2\cos. q_1]\, d\nu + \nu\varphi''(p_1, \nu)\, dp_1\right)^2 \times \left([\nu\varphi''(\nu) - 2\cos. q_1]^2 + \cos. q_1^2\, \varphi''(p_1, \nu)^2\right),$$

woraus erhellet, dafs man blofs den zweiten Factor Null zu setzen braucht, wodurch man folgende Gleichung erhält:

$$\nu \varphi''(\nu) - 2 \cos. q_1 = \sqrt{-1} \cos. q_1 \varphi''(p_1, \nu);$$

die Gleichung (d) geht dann in folgende über:

$$\frac{2\nu}{\cos. q_1} - \nu\varphi'(\nu) + \varphi''(p_1) + \varphi(p_1, \nu) =$$

$$= - \frac{\sqrt{-1}\, \nu \cdot \varphi''(p_1, \nu)}{\cos. q_1},$$

Substituirt man in diese zwei Gleichungen den oben festgesetzten Werth von ν, und eliminirt dann aus diesen so erhaltenen zwei Gleichungen und den obigen Gleichungen (c) die eingeführten Variablen p_1, q_1, so erhält man ein System dreier Gleichungen, die eine willkürliche Function mit sich führen, welche die Integralien der vorgelegten Differenzialgleichung (a) seyn werden.

III.

Analyse des Kropfwassers zu Hall in Oesterreich ob der Enns;

vom

Med. Dr. Ritter von *Holger*.

(Vorgetragen in der practisch-ärztlichen Section der Versammlung der deutschen Naturforscher und Ärzte zu Hamburg, am 24. September 1830.)

Dieses nun immer mehr berühmt werdende Mineralwasser, von dem wir nur die nöthigsten Notizen als Einleitung hier vorangehen lassen, da die umständliche Beschreibung desselben in dem so eben erschienenen Werkchen des Hrn. Dr. *Leopold Wagner* über denselben Gegenstand enthalten ist, mufs uns um so merkwürdiger erscheinen, als es uns auf den wohlgeordneten Vorgang der gütigen Natur aufmerksam macht, die für ein Übel, das sie erzeugt, auch wieder wirksame und sichere Gegenmittel bereit hält. Lange ist es nämlich bekannt und kann nicht geläugnet werden, dafs in Gebirgsgegenden, und vorzüglich bei uns in Steiermark und Kärnthen, Wässer vorkommen, auf deren Genufs der, in diesen Gegenden so häufige, Kropf entsteht; nun werden wir aber von einem Wasser sprechen, welches dieses so lästige als entstellende Übel leicht und sicher zu heilen vermag. Dieses Wasser ist nicht etwa als ein neu entdeckter Arzneikörper zu betrachten, es war schon in den ältesten Zeiten bekannt, und sowohl zum Salzsieden als zur Heilung der Kröpfe verwendet. Seiner wird schon in der Stiftungsurkunde des Stiftes Kremsmünster vom Jahre 777 gedacht, worin dieser Brunnen dem Stifte geschenkt wird, um daraus einen Theil sei-

nes Salzbedarfs zu gewinnen. Als später die reicheren Sohlen zu Gmunden und Ischel in Aufnahme kamen, wurde die Haller Quelle aufgelassen, dafür aber stieg ihr Ruf als Heilwasser immer mehr empor.

Diese Quelle befindet sich im Traunkreise des Erzherzogthums Österreich ob der Enns, zwischen dem Markte *Hall* und dem Dorfe *Pfarrkirchen*, etwa dreifsig Schritte vom Sulzbache *). Sie wurde seit Jahrhunder-

---

*) Dr. *Wagner* bemerkt in seinem oben erwähnten Werkchen über Hall folgendes:

Hall, *Haliola*, Herzoghalle, Haal (eine Salzgrube), ein freier Markt im Lande ob der Enns, im Traunkreise, an der Strafse von Wels nach Seyer, eine Stunde von Kremsmünster, drei eine halbe von Wels, drei von Steier, ober dem Sulzbache, hat seinen Namen von der nahe gelegenen Salzquelle, ganz wahrscheinlich, erhalten.

Der genauesten geographischen Bestimmung zu Folge liegt Hall unter dem 31° — 45′ — 45″ der östlichen Länge, und unter dem 48° — 3′ — 29″ der nördlichen Breite, und 210 Wiener Klafter über dem Mittelmeere. An der östlichen und südlichen Seite begrenzen die nahen steierischen Gebirge den Horizont. Am Fufse des Berges, auf welchem der Markt Hall liegt, fliefst an der Südwestseite der Sulzbach, der seinen Namen wahrscheinlich von der nahen Salzquelle bekam, und sich in dem zwischen Hall und dem eine Viertelstunde weit von Hall entfernten, auf einer Anhöhe gelagerten, Dorfe Pfarrkirchen liegenden Thale von Südost nach Norden dahin schlängelt. Selber entspringt eine Stunde von Hall entfernt bei dem Dorfe Adelwang, und fällt in den nahen Kremsflufs bei dem Dorfe Kematen, eine Stunde von Hall entfernt.

Die Umgebungen von Hall sind schöne, bald mit gröfserem, bald mit kleinerem Gehölze bedeckte Hügel, fruchtbares Ackerland, schöne Wiesen, buschige Auen, welche zu allen Jahrszeiten von den vielen, kerniges

ten von den Anwohnern unter dem Namen *Kropfwasser* zur Heilung von Kröpfen, wie auch gegen Gicht, Skro-

---

köstliches Quellwasser führenden Bächen erfrischt und bewässert werden.

Das Clima ist zwar schnellem Temperaturswechsel unterworfen, dessen ungeachtet genießt diese Gegend eine sehr reine trockene Luft, welche die Fruchtbarkeit und Gesundheit ungemein befördert, daher auch Hall zu den gesündesten Gegenden des Landes ob der Enns zu zählen ist, besonders wegen seiner hohen und trockenen Lage, und seiner schönen Umgebung.

Der mittlere Thermometerstand laut fünfjährigen meteorologischen Beobachtungen beträgt $+ 6^{\circ},86$ *R.*, der mittlere Barometerstand, auf 0° *R.* reducirt, 26″, 11,032 Pariser Maß.

Die herrschenden Winde sind der Nordostwind, als welcher gewöhnlich schönes Wetter bringt, und der Westwind, welcher meistens regnerisches Wetter nach sich zieht.

Der Boden ist von mittlerer Güte, doch gut gepflegt, ergiebig an allen Gattungen von Gartengewächsen. In Rücksicht der beiden organischen Reiche ist die Umgebung von Hall den übrigen flachen Gegenden des Traunkreises ganz ähnlich. Sehr arm aber ist diese Gegend an Mineralien, denn, da der ganze Bezirk bloß aus Hügeln von aufgeschwemmten Gebirgsarten besteht, so zeigen sich unter der Dammerde, außer Geschieben von Rollsteinen und zerstreuten Nestern von Thonmergel und Lehm, nur einzelne, bisweilen ziemlich mächtige Blöcke von Kalkbreccia, welche unter dem Namen Nagelstein bei verschiedenen Bau- und Wirthschafsangelegenheiten als Material benützt wird. Von anderen Erd- und Steinarten, von brennbaren Mineralien oder Metallen war bisher keine Spur aufzufinden. Der Boden nahe und rings um die Salzquelle hat lettige Dammerde.

Hall ist ein freier Markt, hat 123 größtentheils hübsch gebaute Häuser, worunter besonders das Schloß zu bemerken kommt, das auf einem freien mit Lin-

phelsucht, chronische Hautausschläge mit dem ausgezeichnetsten Erfolge angewendet, und in das Land der Kröpfe, nach Steiermark, versendet; seine ausgezeichnete Kraft zur Vertreibung der Kröpfe und gegen die übrigen angeführten Krankheiten, vorzüglich als Antiscrophulosum, wurde durch diese vieljährigen Erfahrungen unwiderleglich bewiesen, und *Cranz* nennt es in seinem Werke die *Gesundbrunnen der österreichischen Monarchie*, pag. 16 schon »gegen Kröpfe und die Krätze weit und breit berühmt.« Indefs war es denn doch in den neueren Zeiten noch nicht allgemein bekannt, und seine Anwendung erstreckte sich nicht weiter als über die nächst anliegenden Gegenden. Erst die Entdeckung des Jods in selbem im Jahre 1828 brachte es in mehr verbreiteten Ruf; denn, so wie es damals vielleicht das erste jodhältige Wasser war, welches man in der österreichischen Monarchie entdeckte, so ist es auch bisher

---

den besetzten Platze, Anger genannt, erbauet ist, und zwischen dem Pfarrhofe und dem eigentlichen ziemlich regulären Marktplatze liegt; selbes gehört dem Herrn Fürsten von *Trautmannsdorf*. Die Häuser gewähren geräumige gesunde Wohnungen. Der Ort ist mit allen in voller Ausübung stehenden Gewerben, dann mehreren bequemen Gasthäusern versehen. Der Markt hat ein reinliches Ansehen, und ist des Nachts immer beleuchtet. Da der Markt so schöne Umgebung hat, so findet man allda auch schöne Spaziergänge; eben so bemerkenswerth ist die interessante Nachbarschaft, nämlich das eine Stunde weit entfernte berühmte Benedictinerkloster Kremsmünster mit seinen Sehenswürdigkeiten, die wegen ihren Eisenmanufacturen so bekannte Kreisstadt Steier, die grofsen Dörfer Steinbach und Sierning, merkwürdig durch die dort wohnenden Zeug- und Messerschmiede. Gute Strafsen führen an alle diese Orte.

das Einzige geblieben, wenigstens das Einzige, welches als solches in Ruf zu kommen verdiente. Zu seiner ausgebreiteteren Anwendung trugen aber auch wesentlich die beiden in Hall und Pfarrkirchen errichteten Badehäuser, und vor allen die Veranstaltung bei, dafs es nun in Wien in mit aller Vorsicht gefüllten Flaschen in jeder beliebigen Menge käuflich zu haben ist.

Bisher fehlte noch eine vollständige Analyse dieses Wassers, von der denn doch noch einige Aufschlüsse zur genauen Bestimmung der Heilanzeigen erwartet werden konnten. Ich führte dieselbe durch, und legte sie zur Beurtheilung der practisch-ärztlichen Section zu Hamburg vor. Da ich unmittelbar vorher über die steiermärkischen kropferzeugenden Wässer gesprochen hatte, so erregte es allgemeines Interesse, dafs ich nun auch ein Wasser vorzeigen konnte, welches dieses Übel leicht und sicher zu entfernen im Stande ist; und wenn gleich Deutschland mehrere jodhältige Salzquellen besitzt, die sich auch durch ähnliche Wirkungen auszeichnen, worunter ich nur vorzüglich die bei *Rosenheim* und *Kreutznach* erwähne, so glaube ich doch, dafs das *Haller* Wasser sich in eine Reihe mit jenen stellen dürfe, und in so ferne interessant sey, wenn es auch nicht, wie bei uns, eine wesentliche Lücke in der Arzneimittellehre ausfüllt.

Das Wasser kommt in Flaschen nach Wien, deren jede zwischen 20 und 21 Loth desselben enthält. Es ist darin vollkommen klar und farbenlos, ohne bedeutenden Geruch. Es schmeckt ziemlich stark nach Kochsalz, mit einem Hinterhalte nach dem jodsauren Salze. Es wirft weder Perlen noch Blasen, hat nicht den stechenden Geschmack nach Carbonsäure, verändert sich beim langen Stehen in der offenen oder verschlossenen Flasche, selbst bei der stärksten Sommerhitze, nicht.

Indeſs erhielt ich doch zuweilen eine Flasche, deren Wasser gelb gefärbt war, und das stark nach *Brom* schmeckte und roch. Daſs eine Umänderung der Brom- und Jodsäure in Brom und Jod bei diesem Übermaſse von Kochsalz eintreten kann, wenn äuſsere zerlegende Einflüsse, etwa Sonnenstrahlen, auf das Wasser wirken, ist nach den bisherigen Erfahrungen leicht begreiflich. Diese Umänderung scheint auch allein die Ursache des unangenehmen Geruches nach gebranntem Schwamm zu seyn, welcher sich an der Quelle bei heiterer, trockener, warmer Witterung schon auf eine Entfernung von 50—60 Schritten zu erkennen gibt. Manche Flaschen enthielten einen geringen gelben Niederschlag, dessen Farbe Eisenoxyd vermuthen lieſs, welches er jedoch nicht enthielt; da dieser bald in gröſserer, bald in geringerer Menge vorhanden war, immer aber im Ganzen sehr wenig betrug, sich beim Kochen und beim Eindicken des Wassers bis zur Trockenheit weder verminderte noch vermehrte, glaubte ich ihn als zufällige Verunreinigung desselben ansehen zu müssen.

Einwirkung der Reagentien auf das nicht concentrirte Wasser.

Blutlauge, salzsaurer Baryt, salzsaures Platin, schwefelsaures Kali hatten gar keine Wirkung.

Schwefelsaures Kupfer gibt einen geringen grünlich-weiſsen Niederschlag, der sich ohne Aufbrausen in Säuren löst, und für *Phosphorsäure* spricht.

Carbonsaures Kali einen starken weiſsen Niederschlag, der, da die Blutlauge keine Metalloxyde anzeigte, nur die *Erdsalze* bedeuten kann. Wird dieser abfiltrirt, so gibt *phosphorsaures Natron* noch einen weiſsen Niederschlag, der das *Lithon* anzuzeigen scheint.

Reines, carbonsaures und *Schwefelammoniak* geben weiſse Niederschläge.

Wird der durch carbonsaures Kali erzeugte Niederschlag in einer Säure gelöset, so zeigt in dieser Lösung *Selensäure* den *Kalk*, und dann reines *Kali* die *Talkerde* an.

Stärke wirkt nicht auf das Wasser, selbst wenn Salpetersäure zugesetzt wird, auch *Chlor* verändert es nicht.

Schwefelsaures Silber erzeugt einen starken weiſsen Niederschlag, der sich nicht ganz in Ammoniak löst. Aus der ammoniakalischen Auflösung desselben scheidet Essigsäure einen starken weiſsen Niederschlag aus.

Das Wasser enthält daher

Salzsäure,	Natron,
Jodsäure,	Lithon,
Phosphorsäure,	Kalk,
	Talk,
	Thonerde.

Einwirkung der Reagentien auf das concentrirte Wasser.

Das Abdampfen des Wassers ging ruhig, ohne Gasentbindung vor sich, es wurde dabei weder gefärbt noch getrübt. Es schmeckte nach dem Concentriren wie eine concentrirte Kochsalzlösung mit unbedeutendem Nebengeschmack nach Jod und Brom. Es reagirte nun stark alkalisch.

Salzsaures Baryt gab nun einen weiſsen, in Säuren unlöslichen Niederschlag, und eine geringe Menge eines dergleichen ohne Aufbrausen löslichen.

Es wurde nun vom Chlor alsogleich blaſs braungelb gefärbt, und mit Äther geschüttelt nahm dieser den braunen Körper auf, und färbte sich blaſs weingelb.

Wurde das Wasser mit Stärke gekocht, so wurde es auf Zusatz von etwas Salpetersäure sogleich blau, und nach der Hand fiel die blaue *Jodstärke* daraus zu Boden. Noch deutlicher erfolgte die Wirkung, wenn es mit Stärke gekocht und dann mit Schwefelsäure und Chlor nach *Balard's* Methode behandelt wurde. Es enthielt demnach

Salzsäure,	Natron,
Jodsäure,	Lithon,
Bromsäure,	Kalk,
Schwefelsäure,	Talkerde,
Phosphorsäure,	Thonerde.

Wurde das Wasser bis zur Trockenheit abgedampft, so gab es eine weiſse Salzmasse, die für 1000 Th. 15.01 wog, und wenn sie ausgeglüht wurde, ein Gewicht von 13.70 hatte.

Die Basen wurden quantitativ folgender Weise bestimmt:

Es wurde das Wasser zweier Flaschen bedeutend concentrirt, hieraus zuerst durch *Ammoniak* die *Thonerde*, dann durch *salzsaures Baryt* der *Schwerspath*, dann wieder durch Ammoniak das *phosphorsaure Baryt* abgeschieden. Endlich wurde es mit carbonsaurem Kali fast bis zur Trockenheit abgedampft, die beim Auflösen im Wasser zurückbleibenden Carbonate durch *Kleesäure* und *phosphorsaures Natron* in *Kalk* und *Talkerde* zerlegt, die Auflösung aber mit *phosphorsaurem Natron* nach der Vorschrift *Berzelius's* behandelt, und das gewonnene Lithondoppelsalz vor dem Löthrohre als solches vollkommen genügend erwiesen. Es ergaben sich folgende Werthe als die Mittelzahlen zweier nur in der letzten Decimalstelle wenig abweichender Mengen der einzelnen Basen für 1000 Th. des Wassers:

Schwefelsäure . . .	0.098
Phosphorsäure . . .	0.012
Thonerde	0.201
Kalk	0.221
Talkerde	0.026
Lithon	0.283
	0.841.

Das Natron wurde aus der gefundenen Menge der Salzsäure und der festen Bestandtheile berechnet.

Salz-, Jod- und *Bromsäure* wurden durch *salpetersaures Silberoxyd* ausgeschieden. Der gesammte weiſse Niederschlag betrug gewaschen und getrocknet als Mittelzahl zweier Versuche 34.27 für 1000 Th. Da aber das salpetersaure Silberoxyd auch die vorhandene *Schwefel-* und *Phosphorsäure* fällte, so muſste hiervon erst das schwefelsaure Silber mit 0.381 und das phosphorsaure Silber mit 0.069 abgezogen werden; es bleibt daher als wahre Zahl für die drei übrigen Silbersalze noch 33.82.

Das Jod wurde nach der neuesten Methode von *Balard* und *Saubeiran* durch *schwefelsaures Eisenkupfer* gefällt. Der graue, beim Trocknen orange gewordene Niederschlag wog getrocknet und gewaschen nach zwei übereinstimmenden Versuchen für 1000 Th. 0.92. Diese bestehen nach den neuesten Atomenzahlen aus 0.61 Jod und 0.31 Kupfer, oder aus 0.54 Jodsäure und 0.38 Kupferoxydul. Das Wasser enthielt aber nicht *Jod*, sondern *Jodsäure*, weil die Stärke von demselben erst auf Zusatz von Salpetersäure oder Chlor blau gefärbt wird. 0.54 Jodsäure nehmen aber 0.18 Natron auf, und bilden damit 0.72 jodsaures Natron, welches man auch als Jodnatrium bestehend aus 0.61 Jod und 0.11 Natrium betrachten kann.

Diese geringe Jodmenge im Verhältnisse mit dem

Volumen der erhaltenen Jodstärke bedurfte noch einer Bestätigung; aufserdem brachte mich die orangegelbe Farbe des Jodkupfers auf die Vermuthung, es könnte mit Eisenperoxyd verunreinigt seyn. Ich stellte daher den gewöhnlichen Versuch an, der sich auf die Unlöslichkeit des jodsauren Silberoxyds im concentrirten Ätzammoniak gründet. Ich erhielt aus einem Loth Wasser 0.0011 in Ammoniak unlösliches Jodsilber, welches für 1000 Th. 1.10 Jodsilber gibt, das aus 0.56 Jod und 0.54 Silber, oder 0.49 Jodsäure und 0.61 Silberoxyd besteht. Um nun die früheren 0.61 Jod zu erhalten, hätte ich hier 0.00119 erhalten müssen; nun konnte ich aber die fünfte Decimalzahl auf meiner Wage nicht mehr bestimmen, wiewohl ich sah, dafs der Körper schwerer als 0.0011, und leichter als 0.0012 war. Da nun *Martini's* neueste Versuche gelehrt haben, dafs das Jodsilber im concentrirten Ätzammoniak nicht ganz unlöslich sey, und für die frühere Zahl zwei übereinstimmende Versuche sprechen, so kann man auch die 1.19 Jodsilber mit grosser Wahrscheinlichkeit annehmen. Zieht man aber diese 1.19 Jodsilber von den früher gefundenen 33.82 ab, so bleiben 32.63 für Chlor- und Bromsilber.

»Um Brom und Chlor quantitativ von einander zu trennen, ist bis jetzt noch keine Methode bekannt« (*Rose's* Handb. d. analytisch. Chemie, S. 526). In der That war das Brom in so geringer Menge vorhanden, dafs der Äther nur blafs weingelb gefärbt wurde, der Silberniederschlag, der das Chlor und Brom enthielt, nicht im mindesten gelb war, und letzteres nach abgeschiedenem Jod aus dem Wasser durch Stärke nicht geschieden werden konnte; ich glaubte daher in Dr. *Wagner's* Werkchen, S. 18, noch das *bromsaure Natron* als Spur ansetzen zu können. Indefs wollte ich doch später die Einzige zu diesem Zwecke bekannte Methode anzuwen-

den versuchen, wenn ich gleich von ihrer Unvollkommenheit überzeugt war, weil sie doch vor der Hand immer noch die Beste bleibt, und erhielt ein Resultat, das wenigstens nicht unwahrscheinlich war. Sie beruht darauf, daſs verdünntes Ätzammoniak zwar das Chlor-, nicht aber das Bromsilber auflösen soll. Nun wissen wir aber noch nicht, ob diese Eigenschaft sich auch auf die kleinsten Mengen ausdehnt, noch weniger aber, wie stark das Ammoniak verdünnt seyn müsse, um den erwarteten Erfolg zu leisten. Ich versuchte mit einer Mischung von 1 Th. Ätzammoniak und 5 Th. Wasser, und erhielt aus 2 Loth Wasser in jenem unlöslichen Brom- und Jodsilber 0.0024, also für 1000 Th. 1.20. Zieht man nun hiervon die oben für das Jodsilber bestimmte Zahl 1.10 ab, so bleibt 0.10 für das Bromsilber. Dieſs enthält 0.058 Silber und 0.042 Brom, oder 0.062 Silberoxyd und 0.038 Bromsäure, die mit 0.016 Natron 0 054 bromsaures Natron bildet oder Bromnatrium, wenn es aus 0.042 Brom und 0.012 Natrium zusammengesetzt angesehen wird.

Es bleiben sonach für das Chlorsilber 32.53. Diese enthalten 8.00 Chlor und 24.53 Silber, oder 6.190 Salzsäure und 28.34 Silberoxyd.

1000 Th. des Mineralwassers enthalten daher

Salzsäure	6.190,	Natron	6.261,
Jodsäure	0.540,	Lithon	0.283,
Bromsäure	0.038,	Kalk	0.221,
Schwefelsäure . .	0.098,	Thonerde . . .	0.201,
Phosphorsäure . .	0.012,	Talkerde	0.026,
	6.878.		6.992.

Im Ganzen 13870, mithin nur um 0.170 mehr, als der frühere Versuch betrug. Diese Differenz rührt vielleicht von einem Säureverlust, den die Salze beim Glühen erleiden.

Versucht man nun die quaternäre Zusammensetzung anzugeben, so scheint mit Berücksichtigung dessen, daſs

beim Abdampfen des Wassers weder Trübung noch Niederschlag entsteht, folgende Berechnung zur wahrscheinlichsten Zusammensetzung zu führen:

0.026	Talkerde	mit	0.050 Schwefelsäure,
			= 0.076 Bittersalz.
0.048	Schwefelsäure	»	0.021 Lithon,
			= 0.069 schwefels. Lithon.
0.262	Lithon	»	0.394 Salzsäure,
			= 0.656 salzsaurem Lithon.
0.012	Phosphorsäure	»	0.005 Alaunerde,
			= 0.017 saurer phosphors. Alaunerde.
0.221	Kalk	»	0.216 Salzsäure,
			= 0.437 salzsaurem Kalk.
0.196	Alaunerde	»	0.314 Salzsäure,
			= 0.510 salzs. Alaunerde.
0.540	Jodsäure	»	0.180 Natron,
			= 0.720 jodsaurem Natron.
0.038	Bromsäure	»	0.016 Natron,
			= 0.054 broms. Natron.
5.266	Salzsäure	»	6.065 Natron,
			= 11.331 Kochsalz.

Das Mineralwasser enthält daher in 1000 Th.

Schwefelsaures Lithon . .	0.069.
Schwefelsaure Talkerde . .	0.076.
Salzsaures Natron	11.331.
Salzsaures Lithon	0.656.
Salzsaurer Kalk	0.437.
Salzsaure Alaunerde . . .	0.510.
Phosphorsaure Alaunerde .	0.017.
Jodsaures Natron	0.720.
Bromsaures Natron . . .	0.054.
	13.870.

Aus diesem geht nun hervor, daſs das Haller Kropfwasser eines der vorzüglichsten auflösenden Wässer sey, denn schon die groſse Menge Kochsalz würde ihm diese Eigenschaft ertheilen; auſserdem kommt aber das *jodsaure Natron* dazu, welches zwar rücksichtlich der groſsen Wirkungen dieses Wassers in nur geringer Menge vorhanden zu seyn scheint, dieſs aber nicht ist; denn wenn wir bedenken, daſs der stärkste Grad von *Lugal's eau minérale jodée (Mémoire sur l'emploi de l'iode dans les maladies scrofuleuses, par Lugal, Paris* 1829) auf 1000 Th. Wasser nur 0.173 Jod, unser Wasser aber 0.560 desselben enthält, und daſs *Lugal* nur in seltenen Fällen genöthiget war, zu dieser starken Auflösung zu greifen, so wird die groſse Wirksamkeit des Haller Jodwassers klar genug. Zudem müssen wir den bedeutenden Lithongehalt nicht übersehen, der gewiſs seine auflösende Wirkung noch sehr erhöht, und so stark ist, daſs es daran allen bekannten Mineralwässern vorsteht, und sogar das *Klausnerwasser* übertrifft, welches ich noch vor einem Jahre als das lithonreichste aller bis dahin bekannten Mineralwässer erwähnen muſste.

Über die Anwendung dieses Mineralwassers gibt das bereits angeführte Werkchen hinreichenden Aufschluſs; hier verdient nur noch, als Merkwürdigkeit, des *Kropfbrotes* gedacht zu werden, welches von den Landleuten der Umgegend erzeugt wird, indem sie zum Befeuchten des Brotteiges statt gemeinem Wasser dieses Mineralwasser nehmen. Es dient früh nüchtern genossen als Heilmittel in allen jenen Fällen wie das Wasser selbst, vorzüglich wirksam aber ist es zur Vertreibung der Kröpfe, daher es auch seinen Namen hat.

IV.

Beschreibung einer neuen und einfachen Extractions- und Filtrirmaschine;

von

Joseph Knezaurek, Chemiker.

Das bisher übliche Verfahren, bei pharmaceutischen und andern technischen Arbeiten zu filtriren, hat den wesentlichen Nachtheil, daſs dasselbe viel zu langsam vor sich geht, besonders wenn in kleinen Quantitäten filtrirt wird, man daher zu viel Zeit dabei verliert, welcher Zeitverlust zu andern Verrichtungen verwendet werden könnte, und daſs in vielen Fallen immer etwas von der zu filtrirenden Flüssigkeit auf dem Filtrum zurückbleibt, welche nicht durchgetrieben werden konnte, daher als Abgang zu betrachten ist.

Man war daher von jeher bemüht, das Filtriren durch Verdichtung oder Verdünnung der Luft schneller zu betreiben, und hat dazu die Luftpumpe vorzüglich mit gutem Erfolge angewendet. Wenn man aber die Kostspieligkeit, und die so zu sagen mit mathematischem Fleiſs auszuführende Zusammensetzung einer solchen Maschine betrachtet, und den Umstand, daſs selbe zu ihrer Bedienung einen schon gebildeteren Laboranten benöthigt, so wird man einsehen, daſs unter diesen Voraussetzungen selbe wenig Anwendung gestattet.

Es handelt sich also darum, einen Filtrirapparat zu construiren, der sich durch seine Einfachheit, Wohlfeilheit, Dauerhaftigkeit und leichte Behandlung vor allen andern Filtrirapparaten auszeichnen muſs, und der leicht handzuhaben ist, wenn ein allgemeiner und mehrfacher Gebrauch von ihm gemacht werden soll.

Ich habe mich daher bemüht, einen solchen Apparat zu construiren, der diesen Anforderungen entspricht, und der aufser seiner Einfachheit auch wohlfeil angefertigt werden kann.

Die Zeichnung (Fig. 1) und Beschreibung wird das Nähere davon erklären.

abcd ist ein Cylinder aus verzinntem Eisen- oder Kupferblech, der oben offen ist. In denselben ist ein anderer Cylinder unten bei *cd* eingelöthet, so zwar, dafs beide Cylinder einen festen Körper bilden. Bei *nm* ist oben an den inwendigen Cylinder ein Filtrirtrichter von 90° oder 45° ebenfalls fest angelöthet. Diese Winkelgrade von 90 oder 45 sind aus dem Grunde nothwendig, weil, wenn man ein Fliefspapier in den Trichter einlegt, dieses Filtrum mit 90° oder 45° eingebogen ist. Dieser Filtrirtrichter ist von Zinn oder einem anderen Materiale, je nachdem man es mit Substanzen und Flüssigkeiten zu thun hat, die diese Metalle nicht oxydiren oder auflösen.

Der Zwischenraum von *mn*, *mn* ist nur so grofs zu machen, dafs der Cylinder *fgio* bequem auf und ab gehen kann. Dieser Cylinder ist oben verschlossen, unten aber offen. Nun wird bis zu der Höhe *mn* Wasser eingegossen, und der Cylinder *fgio* bewegt sich in dieser Wasserschichte auf und ab.

Früher, bevor diefs geschehen, giefst man in den Filtrirtrichter, der inwendig mit einem Filtrum von Fliefspapier oder Leinwand etc. versehen ist, die zu filtrirende Flüssigkeit, stellt das Gefäfs *D* unter den Filtrirtrichter, senkt den obern Cylinder, in der Lage, in der er gezeichnet ist, in das Wasser, verschliefst sodann die Pippe, und legt das Gewicht *h* auf den Cylinder, worauf das Filtriren alsogleich schnell vor sich geht.

Dieses Gewicht *h* muſs aber etwas weniger wiegen, als das Wasser wiegen würde, welches den cubischen Raum *nmio* mit Inbegriff der Höhlung einnehmen könnte; denn wäre dieses Gewicht *h* gröſser, so würde das Sperrungswasser bei *a* und *b* herausgedrängt werden.

Bei einer solchen Vorkehrung des Apparates geht das Filtriren sehr schnell vor sich, da das ganze Gewicht *h* die in dem Filtrirapparate vorhandene atmosphärische Luft zusammenpreſst, die zum Theil aber zusammengepreſste Luft, als mechanische Kraft, vermöge ihrem Expansivdruck auf die zu filtrirende Flüssigkeit einwirkt, so daſs selbe schnell durchgeht, und wenn man feste und flüssige Stoffe auf dem Filter hatte, eine Absonderung beider bezweckt wird, nämlich der feste Körper auf dem Filtrum verbleibt, und der flüssige in dem untergestellten Gefäſs *D* aufgefangen wird. Sodann wird die Pippe geöffnet, der Cylinder herausgezogen, und die Arbeit beginnt von Neuem, wenn man mehr zu filtriren hat.

Nimmt man anstatt reinem Wasser eine gesättigte metallische Salzauflösung in Wasser, als z. B. eine Eisenvitriolauflösung oder Kochsalzauflösung, welche ein bedeutend gröſseres specifisches Gewicht haben als reines Wasser, so kann bei gleicher Gröſse des Apparats das Gewicht *h* bedeutend gröſser genommen werden, der Expansivdruck der Luft auf die zu filtrirende Flüssigkeit ist viel mächtiger, und das Filtriren geht um so schneller vor sich. Im Verhältniſs der durchfiltrirten Flüssigkeit senkt sich der obere Cylinder.

Jedoch darf man diesen Druck nicht zu sehr überspannen, weil sonst die Filtra, wenn selbe aus Flieſspapier sind, in den untern Mündungen des Filtrirtrichters leicht zerreissen könnten. Es sind nämlich unten an dem Trichter einige kleine Öffnungen oder Löcher

angebracht. Hat man andere Filtra, z. B. von Leinwand oder anderen festeren Stoffen, so ist diese Vorsicht nicht nothwendig, weil schon eine grofse Gewalt dazu gehören würde, die etwas ausgebauchten Mündungen dieser Stoffe (nämlich in der Gegend der kleinen Öffnungen an dem untern Theil des Filtrirtrichters) zu durchbrechen.

Dafs die Filtra, sie seyen aus Fliefspapier, Leinwand oder sonst aus einem dazu geeigneten Stoffe, genau nach dem Winkel des Filtrirtrichters zugeschnitten werden müssen, um genau an den Wänden des Filtrirtrichters anzuliegen, versteht sich von selbst. Hat derselbe 90, 45 oder mehr oder weniger Grade, so müssen die Filtra dieselben Grade haben, damit sie sich inwendig an die Wände des Trichters genau anschliefsen.

Bei kleinen gläsernen, eisernen oder kupfernen Filtrirapparaten könnte man auch mit sehr kräftigem Erfolge als Sperrungsflüssigkeit Quecksilber anwenden.

In Beziehung der Verhältnisse der Gröfse der Filtrirapparate gebe ich Folgendes an:

Es ist jederzeit besser, den Apparat eher etwas gröfser als kleiner anfertigen zu lassen, weil, wenn man selbst eine kleine Menge irgend einer Flüssigkeit zu filtriren hat, man nur ein kurzes Filtrum in den Filtrirtrichter einzulegen braucht, um den Apparat gleich in Gang zu bringen. Auch kann man denselben, wenn es nothwendig wäre, inwendig mit einer harzigen Auflösung überstreichen, oder mit einer Lage gewöhnlichen Wachses versehen; letzteres dann, falls beim Filtriren man es nur mit kalten Flüssigkeiten zu thun hat, die filtrirt werden sollen.

Was die Gröfse des Filtrirapparates und der Cylinder anbelangt, so richtet sich dieselbe nach der Gröfse des Filtrirtrichters, wie aus der Zeichnung zu ersehen

ist. Wenn nämlich der Trichter eine Mafs Flüssigkeit aufnehmen soll, so wird derselbe auf eine Mafs angegeben mit einem Winkel von 90 oder 45 Graden.

Die Breite des äufsern Cylinders wird etwa um den sechsten oder achten Theil mehr betragen, als die Breite der obern Mündung des Filtrirtrichters, und seine Höhe kann etwa das Doppelte oder Dreifache der Breite betragen.

Beträgt nämlich die Breite des äufsern Cylinders einen Schuh, so wird seine Höhe zwei, höchstens drei Schuh ausmachen, und man wird den Zwischenraum *mn* nur so weit von einander stellen, dafs das obere Gefäfs bequem auf und ab gehen kann. Diese Verhältnisse scheinen die geeignetesten zu seyn.

Aber auch zur Extractbereitung, ferner zur Darstellung verschiedener ausziehbarer Farben aus Rinden, Blättern, Wurzeln und Hölzern, zu concentrirten Gerbestoffauflösungen, zur Austrocknung feuchter Stärke, bei der Stärkefabrication, und zu anderen technischen Arbeiten kann die von mir angegebene Filtrirmaschine gebraucht und verwendet werden, wobei im Grofsen in manchen Fällen hölzerne Filtrirapparate dienen können.

Man kann selbe daher auch mit vollem Rechte eine Extractionsmaschine heifsen, welche die hydrostatische *Real*'sche Extractionspresse in manchem Falle recht gut zu ersetzen im Stande ist, da die *Real*'sche Presse, durch die dabei in Anwendung gebrachten langen Röhren, die senkrecht aufgestellt werden müssen, äufserst unbequem gehandhabt, und nicht an allen Orten aufgestellt werden kann. Auch zur Darstellung eines kräftigen Caffehs, der Bierwürze, ist meine Presse geeignet, wo man als Filtra Haarsiebe, Leinwand, Stroh oder geschrotenes Malz verwenden kann.

Es ist übrigens nicht nothwendig, die Filtrirvorrichtung trichterartig machen zu lassen, selbe kann auch eine jede beliebige andere Form, als z. B. die eines Tenakels haben, wo ein Jeder nach seinem Bedarf sich eine Form wählen kann, welche er will.

Die Form, welche die Fig. 2 angibt, ist auch recht gut.

Zwei durchgelöcherte horizontale Scheiben, die an einander genau abgeschliffen sind, um gut zu schliefsen, ersparen hier das Fliefspapier, die Leinwand etc. Da die Löcher, wenn die obere Scheibe auf die untere angelöthete gelegt wird, nicht auf einander passen, so mufs sich die durchgeprefste Flüssigkeit durch diese Scheiben dnrchzwingen, und läuft daher in ein untergestelltes Gefäfs klar ab.

Dafs das Verdampfen bei meinem Filtrirapparat, der geschlossen ist, vermieden wird, ist einleuchtend.

Hat man es mit geistigen Extracten oder Filtrationen zu thun, so ist die Ersparung an geistigen Theilen, z. B. des Alkohols, in einem Jahre sehr bedeutend; und sind andere scharfe Substanzen, die die Lunge und Augen angreifen, zu extrahiren oder zu filtriren, so werden diese Übelstände bei Anwendung meines geschlossenen Apparates gröfstentheils vermieden.

V.

Über die Härte der Krystalle *);

vom

Prof. *M. L. Frankenheim* in Breslau.

---

1) Die Resultate der Versuche, welche in der neuesten Zeit zur Erforschung der Gesetze, nach welchen die Cohäsionskraft wirkt, mit der gröfsten Sorgfalt angestellt wurden, sind zu verschieden, als dafs sie aus einer chemischen Verschiedenheit der untersuchten Körper oder aus Beobachtungsfehlern erklärt werden könnten. Massive metallene Cylinder, langsam abgekühlt, zerreissen schon bei einer Belastung von 100 Pf., während dieselben, zu feinen Drähten gezogen oder schneller gekühlt, bei einerlei Querschnitt nicht einmal unter dreifacher Belastung zerreissen. Einige suchen die Gründe dieses Unterschiedes in der Verschiedenheit der Anordnung der Theile, ohne durch diese neue Vorstellungsart die an sich dunkle Sache deutlicher zu machen. Für Jene, welche der Annahme von Atomen widerstreben, hat diese Vorstellungsart gar keinen Sinn, und Jenen, die das Daseyn derselben behaupten, ist es durchaus nicht klar, bei welcher Anordnung der Theile die gröfsere oder geringere Wirkung der Cohäsionskraft Statt findet, so dafs bis jetzt noch unter den ausgezeichnetesten französischen Forschern über die Gesetze der Cohäsionskraft die gröfste Meinungsverschiedenheit herrscht.

---

*) Dieser Aufsatz wurde in lateinischer Sprache als gedruckte Dissertation eingesendet. Er verdient gewifs eine gröfsere Verbreitung, als Dissertationen in der Regel erlangen, darum folgt hier eine Übersetzung.

2) Wir können aber kaum hoffen, daſs uns je durch Körper von cylindrischer oder Drahtform, wie sie bis jetzt angewendet worden, die Geheimnisse der Cohäsionskraft enthüllt werden, denn diese sind nicht einfach, sondern, wie es mikroskopische Beobachtungen lehren, aus mannigfaltig verbundenen Körnern oder Fäden zusammengesetzt; ihr Gefüge scheint zwar gleichartig, aber ihre Gestalt ist durch eine äuſsere Kraft entstanden. Die Gesetze, nach denen die Cohäsionskraft wirkt, lassen sich aber nur an jenen Körpern gehörig erkennen, welche durch keine äuſsere Kraft verändert worden sind, sondern ihre Gestalt der freien Wirkung ihrer Anziehungskraft verdanken. Dieſs findet aber nur bei Krystallen Statt, die Stärke ihres Zusammenhanges ist daher jener Untersuchung würdig, deren sie bis jetzt fast gänzlich entbehrte.

3) Es ist zwar zu bedauern, daſs die Krystalle viel zu klein und zu ungleichartig sind, als daſs ihr Zusammenhang oder ihre Elasticität auf dieselbe Weise geprüſt werden könnten, wie die anderer Körper; allein es findet sich glücklicher Weise an ihnen ein anderes Merkmal der Cohäsionskraſt vor, nämlich die *Härte*, deren Anzeigen, wiewohl weniger genau, dennoch da von groſsem Nutzen sind, wo andere Mittel fehlen.

Die Mineralogen aus *Werner's* Schule, welche sich mit allen Eigenschaften der Naturkörper beschäftigten, die sich auf keine Weise, selbst nicht mit Hülfe künstlicher Vorrichtungen, erkennen lassen, haben auch Tafeln der relativen Härte der Naturkörper entworfen, welche zwar sehr zu ihrem Zwecke paſsten, dessen ungeachtet aber den Physikern bis jetzt von keinem Nutzen waren. Denn das, was bei der Härte der Krystalle eigentlich am meisten zu berücksichtigen und bei der Untersuchung des Zusammenhanges der Theile in Krystallen von der

gröfsten Wichtigkeit war, nämlich die Verschiedenheit der Härte an verschiedenen Stellen eines und desselben Körpers haben sie aufser Acht gelassen, und doch ist dieselbe bei einigen Körpern, z. B. beim Cyanit, Gyps, so auffallend, dafs sie sehr leicht wahrgenommen werden und den Mineralogen kaum entgehen konnte, da fast überall eine solche Verschiedenheit angetroffen wird.

4) Auch hielt es nicht schwer, eine Vorrichtung zu ersinnen, um den Krystall mit einem Körper stets mit gleicher Stärke zu streichen. Doch da es sich darum handelt, die Verschiedenheiten der Härte zu gewahren, defshalb die Lage der Krystalle oft zu verändern und sie mit verschiedenen Körpern zu streichen, so bietet die Einrichtung eines solchen Apparates um so weniger einen Vortheil, als schon das Gefühl der Stärke des Striches die hierzu von Jugend an gewöhnte Hand mit solcher Empfindlichkeit leitet, dafs man bei diesen Versuchen keines andern Hülfsmittels bedarf. Die Körper, deren ich mich so zum Streichen bediente, waren Stängelchen oder Nadeln von Zink, Blei, Zinn, Gold, Silber, Kupfer und Eisen von verschiedener Härte; bei härteren Körpern dienten mir der Topas und Saphir. Aus diesen Körpern wählte ich jene, welche den zu prüfenden Krystall an Härte am wenigsten übertrafen, oder ich strich sie, wenn sie härter waren, mit solcher Stärke, dafs das Verhältnifs der Härteunterschiede im Krystalle und dem streichenden Körper möglichst grofs ausfiel. Bei jedem Krystalle wurden aber nur jene Beobachtungsresultate mit einander verglichen, welche mittelst desselben Stängelchens möglichst schnell hinter einander erhalten wurden.

Schlägt man diesen Weg mit Sorgfalt ein, so wird man, wenn es auch nicht gelingt, die Verhältnisse der Cohäsionskrsft in Zahlen auszudrücken, doch wenigstens

dahin gelangen, die geringsten Härteunterschiede wahrzunehmen, wenn nur die zu prüfenden Flächen äuſserst glatt, rein und wo möglich vor Kurzem bloſsgelegt sind. Rauhe Flächen eignen sich zu diesen Versuchen nicht, weil der streichende Körper wie ein Hebel wirkt, der seine Unterstützungspuncte an den hervorragenden Stellen findet, und daher selbst bei gleichem Drucke mit der Hand den Körper stärker streicht, und ihn auf diese Weise weniger hart erscheinen macht.

5) Es gibt zweierlei Härteunterschiede; die einen finden an derselben Fläche nach verschiedenen Richtungen, die anderen an verschiedenen Flächen desselben Krystalls Statt. Die ersteren sind gröſstentheils viel geringer als die letzteren, und nur mit gröſserer Mühe zu gewahren, gestatten aber auch, einmal entdeckt, eine gröſsere Sicherheit. Denn die Ursachen, welche eine Änderung der Oberflächen bewirken, der Einfluſs des atmosphärischen Wassers oder der Rauheiten vermindern oder verwischen gar die Härteunterschiede, ohne jedoch ihr Verhältniſs in verschiedenen Richtungen so zu verkehren, daſs jene, welche zuvor härter war, jetzt weicher geworden wäre. Ja nicht einmal an künstlich polirten, welche viel weniger glatt als die natürlichen sind, fallen die Härteunterschiede immer ganz weg, sobald die Streifen fehlen, die man sehr häufig an Krystallen wahrnimmt, und die jede Prüfung der Härte verhindern, weil sie nach verschiedenen Richtungen verschieden wirken. Denn die den Streifen parallelen Linien sind glätter und aus Ursachen, die wir oben erwähnten, viel härter als jene, welche auf den Streifen senkrecht stehen. Häufig findet man jedoch an jenen Körpern, an welchen man zuweilen Streifen trifft, selbst die glatten Flächen in der auf die Streifen senkrechten Richtung minder hart, als in der zu ihnen parallelen.

6) Wir wollen mit jenen Unterschieden, welche an derselben Fläche wahrgenommen werden, den Anfang machen, weil sie einfacher sind. Denn es mag die Wirkung der Cohäsionskraft in der auf die Fläche senkrechten Richtung wie immer geartet seyn, so bleibt sie nach allen Richtungen, die in der Fläche selbst gezogen werden, stets dieselbe, und kann keinen Unterschied hervorbringen. Solche Unterschiede müssen, wo sie gefunden werden, von einer Seitenwirkung der Cohäsionskraft herrühren. Jene Richtungen werden von den Krystallographen für gleich geachtet, haben auch dieselbe Härte, und wo die Härte ungleich ist, da findet sich auch in den Axen oder Abmessungen der Krystalle ein Unterschied.

7) Körper, welche ihren chemischen Eigenschaften nach ganz verschieden sind, doch dieselben oder einander ähnliche Gestalten besitzen, befolgen dieselben Gesetze der Härte. Dieses ist aber nicht so zu nehmen, als hätten sie dieselbe Härte, ja sie können hierin viel von einander abweichen, sondern es finden für sie dieselben Härteverhältnisse Statt. Beispiele liefern der kohlensaure Kalk, salpeters. Natron, Flufsspath und salpeters. Strontian. Diese Übereinstimmung findet sich aber nur bei solchen Körpern, deren Krystalle in der That ähnlich sind, nicht bei jenen, die gegen ihre Natur nur künstlich in dieselbe Ordnung gebracht sind, wie diefs z. B. beim Flufsspath und Chlornatrium der Fall ist, bei welchen schon die Lage des Blätterdurchgangs zeigt, dafs sie ihre Gestalt verschiedenen Anziehungsgesetzen verdanken. Zwischen der Richtung des stärksten und schwächsten Blätterdurchgangs und der Härte herrscht der innigste Zusammenhang, und zwei Körper, welche zwar dieselbe Gestalt, aber verschie-

dene Blätterdurchgänge besitzen, werden gewifs in ihren Härteverhältnissen von einander abweichen.

Im *Weifs*'schen zweiaxigen oder im *Mohs*'schen prismatischen Systeme kann es zwei Arten von irgend einer Axe parallelen Blätterdurchgängen geben: deren sind entweder zwei gleiche, aber unter einem spitzigen Winkel gegen einander geneigte, oder es gibt nur einen einzigen, und wenn ihrer zwei sind, so sind sie ungleich und stehen auf einander senkrecht. Ersteres findet am Baryt, letzteres am Anhydrit Statt.

Beim Baryt sind von drei Flächen des stärksten Blätterdurchganges zwei den Flächen des Prisma's von 101° 42′ parallel, eine darauf senkrecht. Auf dieser Fläche habe ich die geringste Härte parallel zur kürzeren Diagonale oder senkrecht auf die abgestutzte stumpfe Kante gefunden, die gröfste Härte hingegen parallel zur längeren Diagonale oder senkrecht auf die abgestutzte scharfe Kante. Ähnliches fand ich an andern Körpern derselben Gattung.

8) Dasselbe Härteverhältnifs findet man an jenen Flächen, gegen welche zwei gleichartige Blätterdurchgänge zwar schief, aber symmetrisch geneigt sind, wie diefs bei vielen Körpern des einaxigen, rhomboëdrischen Systemes u. s. w. der Fall ist, z. B. beim kohlensauren Kalk, salpetersauren Natron, wo in der Richtung parallel zur längern Diagonale eine gröfsere, parallel zur kürzern eine geringere Härte Statt findet. In den mittleren Richtungen fand ich auch eine mittlere Härte, jedoch nicht so, dafs sie gleichförmig von der kürzeren Diagonale gegen die längere hin zunähme, sondern oft liegt die Stelle der mittleren Härte jener der gröfsten Härte näher als der der geringsten.

9) Andere Gesetze befolgen jene Krystalle, welche zwei, zwar ungleichartige, aber unter sich und auf die

zu prüfende Fläche senkrechte Blätterdurchgänge haben. Beim Anhydrit gibt es drei auf einander senkrechte, leicht zu trennende (d. h. sehr deutliche) Blätterdurchgänge, von welchen wir den deutlichsten mit *A*, den andern mit *B*, und den dritten minder deutlichen und glänzenden mit *C* bezeichnen wollen. In der Fläche *C* sind die Härteunterschiede viel zu gering, als dafs sie mit Sicherheit erkannt werden könnten. In der Fläche *A* findet sich aber die geringste Härte senkrecht auf die Fläche *B*, die gröfste entweder senkrecht auf *C* oder senkrecht auf die Diagonale, so dafs die Richtung der gröfsten Härte viel weniger bestimmt, und die mittlere Härte der kleinsten näher liegt als der gröfsten.

Eben so verhält es sich in der Fläche *B*, wo die geringste Härte senkrecht auf *A* sich findet, die Richtung der gröfsten aber zwischen den Diagonalen und der auf *C* senkrechten Kante unbestimmt ist.

An der Endfläche des Borax steht die Richtung der geringsten Härte senkrecht auf der abgestutzten scharfen Kante des Würfels, d. i. senkrecht auf dem deutlichsten Blätterdurchgange.

Ähnliches findet man an allen jenen Flächen anderer Krystalle, welche gegen die Richtung zweier auf einander senkrechter Blätterdurchgänge unter rechtem oder nicht sehr schiefem Winkel geneigt sind. In der auf dem deutlicheren Blätterdurchgang senkrechten Richtung, oder wo nur ein Blätterdurchgang beobachtet wird, in der darauf senkrechten Richtung, sind sie weicher im Striche als in jeder andern Richtung.

10) Da die Krystalle der zwei doppelaxigen Systeme eine so verschiedene Härte zeigen, so war es mir von grofser Wichtigkeit, jene Körper zu prüfen, in welchen die Eigenschaften beider vereinigt sind, nämlich jene Krystalle, welche zwei sowohl gleiche als auch auf die

zu prüfende Fläche senkrechte Blätterdurchgänge besitzen, mithin die Endflächen der Krystalle des vieraxigen oder pyramidalen, oder die Hexaëderflächen des Tessular-Systemes. Es war mir wahrscheinlich, daſs diese Unterschiede, wenn es hier welche gäbe, nur mit gröſster Mühe aufgefunden werden könnten, da an den einzelnen Flächen wegen der symmetrischen Form bloſs zwei unter 45° geneigte Maxima und Minima vorkommen können. Aber auch hier habe ich Unterschiede gefunden, wie ich sie dem Vorhergehenden gemäſs erwartete.

Beim Chlornatrium, dessen Blätterdurchgang hexaëdrisch ist, fand ich die den Diagonalen parallelen und sorgfältig untersuchten Linien härter als jene den Kanten parallelen. Beim Fluſsspathe, dessen Blätterdurchgang octaëdrisch ist, gehen durch die hexaëdrischen Flächen vier, durch die einzelnen Diagonalen zwei Spaltungsrichtungen. So wie die Härte nach den Kanten am Chlornatrium, eben so ist die nach den Diagonalen am Fluſsspathe beschaffen, und so wie an jenem Körper sich die Diagonalen härter zeigen, eben so sind es an diesem die Kanten; es unterliegt keinem Zweifel, daſs dieſs von der Biegsamkeit des Meersalzes herrührt, denn bei geschmeidigen Körpern wirkt die Cohäsionskraft nach andern Gesetzen als bei starren, aber bei jenen lassen sich Härteunterschiede nicht so leicht unterscheiden, so daſs ich bis jetzt nicht im Stande war, an biegsamen Körpern, z. B. an krystallisirten Metallen etc., einen solchen Unterschied zu bemerken.

11) Sind schon jene Härteunterschiede, welche an einer Fläche ein zweifaches Maximum und Minimum erreichen, sehr schwer aufzufinden, um so schwerer ist dieses bei jenen, welche einem drei- oder mehrfachen Wechsel unterliegen. Aus dieser Ursache gelang es auch

nicht, an Flächen senkrecht auf eine Axe des drei- oder sechsaxigen Systemes, oder an kürzlich entblöfsten und wiederholt sorgfältig geprüften Flächen des Octaëders längs den den Kanten parallelen Dreiecksseiten, und jenen, die gegen sie unter 30° geneigt sind, irgend einen Unterschied zu entdecken. Doch folgt daraus nicht, dafs es daselbst wirklich keine Unterschiede gebe Übrigens hemmt nicht die Anzahl der Seiten-Blätterdurchgänge, sondern ihre Lage die Untersuchung, da, wenn auch an den Octaëderflächen des Flufsspathes schon bei drei Blätterdurchgängen die Unterschiede verschwinden, doch noch nicht an den Hexaëderflächen desselben Krystalls vier, ja am schwefelsauren Zink nicht einmal fünf Blätterdurchgänge allen Unterschied verwischen.

Die Blätterdurchgänge dieses Körpers sind den Flächen des Rhombendodecaëders parallel. Durch die einzelnen Rhomben gehen fünf Blätterdurchgänge, deren vier den Kanten des Rhombus, der fünfte der längern Diagonale parallel sind. Diese Flächen lassen sich leichter nach Richtungen, die parallel zur kürzern Diagonale sind, ritzen, als nach den zur längeren Diagonale oder zu den Kanten parallelen. Die Ursache davon läfst sich leicht einsehen, denn die vier den Kanten parallelen Blätterdurchgänge bringen aus obigen Ursachen parallel zur kürzern Diagonale eine geringere Härte hervor. Nach dieser Richtung wäre auch vermög der Wirkung des fünften Blätterdurchganges allein die Härte am geringsten; kein Wunder also, dafs sich die längere Diagonale viel härter als die kürzere beweist. Auch fand ich nicht einen Krystall dieses Systemes, an welchem ich so auffallende Härteunterschiede hätte wahrnehmen können.

12) Diese Beispiele habe ich von Krystallen des Tessular-Systemes nicht etwa defshalb entlehnt, als wenn ich nur dieses allein der Prüfung unterworfen hätte, son-

dern weil sie beweisen, dafs es auch in diesem Systeme Unterschiede im Zusammenhange der Theile gebe, obschon man sie weder mittelst der Wirkung der Wärme noch der des Lichtes aufzufinden vermag; und dafs dieser Zusammenhang der Theile an Krystallen, der wahrscheinlich die Polarisation des Lichtes begründet, dennoch nicht dieselben Gesetze befolget *).

13) Aus dem, was wir bei Krystallen von hexaëdrischem oder octaëdrischem Blätterdurchgange anführten, kann man die oben erwähnten Härteverhältnisse anderer Flächen ableiten. Bei gleichartigen und rechtwinkeligen Blätterdurchgängen haben wir nach den darauf senkrechten Richtungen, die wir normal nennen wollen, eine geringere Härte gefunden, als nach den Diagonalen. Wenn die Härte nach der einen Normale wächst, während sie nach der andern dieselbe bleibt, so wächst zwar die Härte nach den gegen die Normale unter 45° geneigten Richtungen, aber in einem kleineren Verhältnisse als nach der Richtung der Normale selbst; und war sie zuvor etwas geringer, so nähert sie sich alsbald allmählich der Härte nach der Richtung der Diagonalen, ja wächst die Härte gar schnell, so kann es geschehen, dafs sie auch schnell die nach den Diagonalen übertrifft, und es ist kein Zweifel, dafs die Härte der Normalen sich desto mehr ändere, je gröfser bei gleichen Umständen der Unterschied ist, welcher in den gehörig gelegenen krystallographischen Abmessungen herrscht. Auch wäre es von grossem Nutzen, jene Abmessungen ausgemittelt zu haben,

*) Dafs es dieser Zusammenhang sey, der die Polarisirung des in die innern Theile der Körper eindringenden Lichtes begründet, und die Gesetze bestimmt, nach welchen sowohl Glasarten von ungleichem Zusammenhange als auch Krystalle das Licht brechen, diefs werde ich bei einer anderen Gelegenheit erörtern. *(F)*

längs welchen die Härte nach den Diagonalen der nach der Normalen gleich kommt, wiewohl es kaum durch Versuche bestimmt werden kann, da die Härteunterschiede zwischen der Diagonale und den Normalen nicht nur geringer als bei Körpern des Tessular-Systemes sind, sondern man auch häufig ungewiſs ist, ob die Härte nach den Normalen oder nach der Diagonale am gröſsten ist. Dieſs haben wir auch an den Flächen *A* und *B* beim Anhydrit gesehen, wo die Richtung der kleinsten Härte leicht, jene der gröſsten aber fast gar nicht bestimmt werden konnte. Dasselbe findet man bei andern Körpern. Wo sich eine groſse Härteverschiedenheit vorfindet, da stimmen die Richtungen der gröſsten und kleinsten Härte fast mit den Normalen überein, wie beim Gyps in der Richtung der Flächen des schwächeren Blätterdurchgangs.

14) Dieſs über die erste Ordnung der Krystalle dieser Gattung. Es findet aber bei jenen, wo die Härte nach den Normalen zwar gleich bleibt, aber ihr Winkel stumpf wird, ein anderes Härteverhältniſs Statt. Wenn wir die Bezeichnung: Diagonale beim neuen Parallelogramme, beibehalten, so können wir sagen, daſs die Härte derjenigen Diagonale, welche den spitzigen Winkel der Normalen schneidet und ihnen daher näher tritt, vermindert, und die Härte der kürzern Diagonale vermehrt werde. Je näher sie den Normalen tritt, desto weniger wird sie von der längern Diagonale an Härte übertroffen, und es ist kein Zweifel, daſs auch hier die Härteverhältnisse eine von dem Winkel der Normalen abhängige Function sind, aus welcher, wenn sie bekannt wäre, leicht gefunden werden könnte, bei welchen Winkeln die Härte nach der kürzern Diagonale der nach der Normalen gleich kommt, ja sie sogar übertrifft. Auch hätte ich aus den Versuchen, welche ich anführte, die Function zwischen der Härte und jenen Winkeln oder Abmes-

sungen suchen können, wenn Formeln, welche nicht durch eine grofse Zahl ausführlicher Versuche begründet sind, Vertrauen verdienten.

15) An Krystallen dieses Systemes, und zwar an dem Parallelogramm, welches durch einen der Endfläche des Prisma's parallelen Schnitt entsteht, habe ich folgendes gefunden:

Am kohlensauren Kalk, schwefelsaurem Baryt und an ähnlichen, findet sich die gröfste Härte in der Richtung der längern Diagonale, die geringste aber zwischen der kürzern senkrecht auf die abgestutzte stumpfe Kante und den Normalen. An Körpern hingegen, die dem Anhydrit ähnlich sind, und wo entweder ein oder zwei rechtwinkelige Blätterdurchgänge sich vorfinden, steht die Richtung der geringsten Härte in der längern Diagonale auf der abgestutzten scharfen Kante senkrecht, die der gröfsten Härte liegt aber zwischen der kürzern Diagonale und den Kanten.

16) Prismen, welche ich gemeine nannte, sind nicht immer solche, welche von den Krystallographen die einfachste Bezeichnung erhalten haben, sondern jene, welche entweder häufiger vorkommen, oder bei welchen der stärkere Blätterdurchgang den prismatischen Flächen parallel ist. Diese stimmen häufig mit der *Weifs'*schen Bezeichnungsweise, und bei den dem Anhydrite ähnlichen Krystallen auch mit der *Mohs'*schen überein; nicht aber bei den dem Baryte ähnlichen Körpern, wo das Octaëder, dessen sich dieser ausgezeichnete Gelehrte immer als Grundgestalt bedienen wollte, jenem Prisma diese einfache Bezeichnung nicht zu geben vermochte, weil die Lage der abgeleiteten Flächen gegen einander in den zwei Ordnungen dieses Systemes verschieden ist. Diese Verschiedenheit ist so auffallend, dafs man bei jenen Körpern, deren Blätterdurchgänge nicht wahrgenommen

werden, aus dem bloſsen Gefüge der Flächen entscheiden könnte, zu welcher Ordnung sie gehören. Was aber noch in diesem und andern Systemen über das Gefüge der Flächen, wobei noch das meiste vom Zufalle und von keinem Gesetze abzuhängen scheint, zu bemerken komme, dieſs wollen wir bei einer anderen Gelegenheit besprechen.

(Die Fortsetzung folgt.)

VI.
Fortschritte der Physik in der neuesten Zeit.

A. Electricität.

1. Magnetisiren durch Electricität. Von *G. Moll.*

(Bibl. univ. Sept. 1830, *p.* 19.*)*

Dem deutschen physikalischen Publikum ist durch einen in *Schweigger's* Journal, Bd. 58, S. 273 enthaltenen, von *Pfaff* in Kiel herrührenden Bericht die auſserordentliche magnetisirende Kraft eines electrischen Stromes bekannt, der durch einen dicken Kupferdraht spiralförmig um ein weiches, in Form eines Hufeisens gebogenes Stück Eisen geleitet wird. Diesem Berichte gemäſs erlangt ein solches Hufeisen von 2 Decimeter (7.6 Zoll) Länge und 12 Millimeter (5.5 L.) Dicke, um das ein 3 Millimeter (1.4 L.) dicker Kupferdraht in 170 Windungen herumgeführt wurde, durch den electrischen Strom, wie ihn ein *Volta*'sches Element liefert, das aus einem $2^1/_2$ Decimeter (9.5 Z.) hohen, 2 Centim. (0.8 Z.) weiten cylindrischen Kupferkasten und einem entsprechenden Zinkcylinder besteht, und als flüssigen Leiter eine aus 16 Th. Wasser, 1 Th. Salzsäure und $^1/_2$ Th. Salpe-

tersäure gemischte Flüssigkeit enthält, eine magnetische Kraft, mittelst welcher es 6, 8 ja 10 Pfund tragen kann. *Appel* in Göttingen hat Apparate zu solchen Versuchen dem physikalischen Publikum käuflich angeboten, die noch mehr leisten, als der vorher besprochene. Auch hier in Wien ist dieser Versuch mit Erfolg angestellt worden, und es werden auch da fast von jedem mechanischen Künstler die dazu nöthigen Apparate gearbeitet. Bei einem derlei Versuche trug das Hufeisen, das vor dem Versuche keine Spur von Magnetismus zeigte, nach Schliefsung der Kette mittelst eines *Volta*'schen Elementes, wovon die Zinkplatte 2 F. breit und eben so hoch ist, 15—20 Pfund. Alles dieses wird bei weitem von dem übertroffen, was *Moll* in dem Aufsatze anführt, von welchem hier das Wichtigste folgen soll:

Das Hufeisen besteht aus englischem, weichen Eisen, einen engl. Zoll dick, und ist mit einem $^1/_8$ Z. dicken Kupferdrahte 83 Mal spiralförmig überwunden. Das Ganze wiegt nahe 5 Pf. Eine Armatur von der gewöhnlichen Einrichtung dient zur Verbindung beider Füfse des Hufeisens mit einander, und hat ein Gewicht von 1 $^1/_4$ Pf. Der Electromotor besteht aus einem einzelnen Elemente, dessen Theile ein Kupfertrog und eine darein passende Zinkplatte sind. Die mit dem flüssigen Leiter in Verbindung stehende Fläche des Zinkes hat 11 engl. Quadratfufs. Die leitende Flüssigkeit ist Wasser mit $^1/_{60}$ Schwefelsäure und $^1/_{60}$ Salpetersäure dem Gewichte nach. Dieser Apparat erzeugt einen so kräftigen Magnetismus, dafs man an die Armatur 50 Pf. hängen kann, ohne dafs ein Ablassen des Gewichtes erfolgt, ja wenn man die Belastung sorgsam wachsen läfst, so kann man sie auf 76 Pf. steigern. Diese Kraft läfst an ihrer Stärke alsogleich nach, sobald der electrische Strom unterbrochen ist, wenn man aber die Belastung unter ihrem Ma-

ximum läſst, so bleibt sie noch mehrere Minuten am Hufeisen hängen, und zwar desto länger, je tiefer diese Belastung unter dem Maximum steht. Kehrt man aber die Richtung des electrischen Stromes um, so fällt das Gewicht ab, man mag sich mit der Auswechslung der Polardrähte wie immer beeilen, doch zieht das Hufeisen augenblicklich wieder Eisen an. Nur bei einer sehr schwachen Belastung mittelst einer Stahlnadel kann man es dahin bringen, daſs dieselbe während der Umkehrung des electrischen Stromes nicht abfällt, indem jeder Pol derselben so schnell in den entgegengesetzten übergeht, daſs sie nicht Zeit hat, sich durch die Schwere hinreichend vom Hufeisen zu entfernen, um nicht wieder angezogen zu werden. Sie nimmt im Augenblicke des Polwechsels eine kleine Bewegung an, fällt aber in der Regel nicht ab. Hält man während der Umkehrung des electrischen Stromes die Armatur mit der Hand, so fühlt man gleichsam die Geschwindigkeit, mit welcher die Pole verwechselt werden, indem in dem Augenblicke, wo der Magnetismus des Eisens = o ist, das Eisenstück, das nun ganz der Schwere überlassen ist, einen vorübergehenden Druck auf die Hand ausübt.

Wenn man die Belastung so sehr vermehrt, daſs sie abfällt, so trägt der Magnet nicht gleich wieder so viel, als er vorhin zu tragen vermocht hat, bekommt aber nach einiger Zeit wieder seine vorige Kraft. Dasselbe habe auch ich bei Wiederholung dieses Versuches deutlich wahrgenommen *). Es verhalten sich demnach diese Magnete wie andere künstlich durch Streichen erzeugte. Daſs man mit einem Hufeisen der genannten Art andere Stäbe magnetisiren kann, ist für sich klar.

Die Stärke des Magnetismus, den man durch den

---

*) Mit dem S. 107 beschriebenen Elemente. *(B.)*

electrischen Strom zu erzeugen im Stande ist, hängt nicht immer von der wirksamen Fläche des Electromotors ab. Dieses zeigte sich bei folgenden Versuchen *Moll's*. Dieser Gelehrte verband mit dem zuerst gebrauchten *Volta*'schen Elemente ein zweites so, daſs Kupfer mit Kupfer, Zink mit Zink communicirte, und beide Elemente gleichsam ein einziges von doppelter wirksamer Fläche, nämlich von 17 Quadratfuſs, ausmachten. Der Magnet vermochte, als der von diesem Electromotor gelieferte Strom ihn umkreisete, kein gröſseres Gewicht zu tragen, als vorhin. Messingdraht wirkte wie Kupferdraht; ein kupfernes Hufeisen, auf gleiche Weise behandelt wie das eiserne, zeigte keine Spur einer magnetischen Kraft. Eisendraht statt des Kupfers oder Messings gebraucht, und vom Hufeisen durch einen Seidenüberzug recht isolirt gehalten, brachte an dem letzteren eine magnetische Kraft hervor, vermöge welcher er 86 Pf. zu tragen im Stande war.

Ein Hufeisen aus deutschem Schmiedeeisen von 2 $^1/_4$ Z. Dicke und 12 $^1/_2$ Z. Weite, mit $^1/_8$ Z. dickem Messingdraht in 44 Gängen umwunden, trug mittelst einer Armatur von 4 Pf., als ein electrischer Strom von einem Elemente mit 11 Fuſs wirksamer Oberfläche ihn umströmte, 135 Pf., ja als er durch einen Seidenüberzug gut isolirt war, gar 154 Pf. Stärkere Magnete hat man bis jetzt überhaupt selten zu Stande gebracht. *Galiläi* soll einen Magnet von 6 Unzen Gewicht zu Stande gebracht haben, der 15 Pf. trug; der berühmte Magnet im Harlemer Museum trug 150 Pf., und sammt der Armatur 200 Pf., nach *Van Marum* gar 230 Pf.; in Amsterdam soll ein Magnet existiren, der 50 Pf. trägt; der gröſste von *Lenoble* verfertigte Magnet trug 105 Pf.; jener Magnet, den ein chinesischer Kaiser dem Könige *Johann V.* von Portugall geschenkt hat, soll 200 Pf. getragen ha-

ben; ein Magnet, den Prof. *Allamand* in Leiden besafs, trug 120 Pf.; *Coulomb* besafs einige Magnete, die 20 Pf. wogen, und 125 Pf. trugen; der deutsche Gelehrte *Keil* endlich soll einen Magnet verfertiget haben, der 150 Pf. trug. Demnach gehört der von *Moll* durch Electricität erzeugte Magnet zu den stärksten, die man bis jetzt erzeugt hat.

2. Über die physiologischen Wirkungen eines electrischen Stromes auf einen Frosch. Von *L. Nobili.* (Fortsetzung.)

(Bibl. univ. Juni 1830.)

Es war bereits im Bd. VIII. dieser Zeitschrift die Rede von den eigenthümlichen Wirkungen, welche ein electrischer Strom (nach *Nobili*) auf einen entblöfsten Froschcruralnerv ausübt. Diese Wirkung läfst sich nach dem Grade der Reizbarkeit des Thieres in fünf Perioden eintheilen, die bereits aufgezählt und näher charakterisirt sind. Nun sollen die in diesen fünf Abstufungen hervortretenden Phänomene näher beleuchtet und erklärt werden.

In der ersten Periode treten bekanntlich sowohl beim Öffnen als beim Schliefsen der Kette fast gleich starke Zuckungen ein, es mag der electrische Strom direct oder umgekehrt seyn. Der wahrscheinliche Grund dieser scheinbaren Gleichheit liegt nach *Nobili* darin, dafs bei der hier herrschenden grofsen Reizbarkeit des Thieres alle Einwirkungen so starke Contractionen hervorbringen, dafs sich daran die Verschiedenheit der angewandten Erregungsmittel nicht mehr wahrnehmen läfst.

In der zweiten Periode, wo beim Schliefsen der directe Strom, beim Öffnen aber der umgekehrte eine starke Zuckung hervorbringt, während beim Öffnen

der Kette mit dem directen Strome gar keine Wirkung, beim Schliefsen hingegen mit dem umgekehrten nur eine schwache Zuckung eintritt, zeigt sich die Eigenthümlichkeit des Nerves, nach der Richtung seiner Verzweigung eine Bewegung leichter fortzupflanzen, als nach der entgegengesetzten. So wie beim Schliefsen der Kette der directe Strom beginnt, wird der Nerv stark erschüttert, weil er die Bewegung nach der Richtung des Stromes gut leitet, während er nach der entgegengesetzten Richtung als minder guter Leiter des Stromes keine merkliche Einwirkung erfährt. Der directe Strom versetzt den Nerv in einen weniger gewaltsamen Zustand, als der umgekehrte, und defshalb wird er beim Aufhören dieses Stromes nur eine schwache Veränderung erleiden und nur wenig zucken, beim Unterbrechen des umgekehrten aber, der den Nerv in einen unnatürlicheren Zustand versetzte, kann eine starke Erschütterung nicht ausbleiben. In dem Mafse, als die Reizbarkeit des Thieres sinkt, werden auch die an sich schon schwachen Erschütterungen immer schwächer, und verschwinden endlich ganz, so dafs nur noch die stärkeren übrig bleiben, und hierin liegt der Grund der Erscheinungen der dritten, vierten und fünften Periode.

Überhaupt geht aus Allem hervor, dafs bei schwachen electrischen Kräften der directe Strom beim Schliessen, der umgekehrte beim Öffnen der Kette die stärkesteren Zuckungen hervorbringt, und dieses Gesetz enthält im Grunde den Schlüssel zu allen erwähnten Phänomenen. Doch darf man nie den Grad der Empfindlichkeit und Vivacität des Thieres übersehen, dessen Nerv dem Strome ausgesetzt ist, und die von der Temperatur, Jahreszeit etc. abhängt, und es können aus einer unterlassenen Rücksicht dieses Umstandes Anomalien zum Vorschein kommen, die den aufgestellten Sätzen

entgegen sind. Darum gibt *Nobili* auch an, dafs er seine Versuche gröfstentheils im Herbste bei einer Temperatur von 15° *C.* angestellt habe. In einer Zeit, wo den Thieren weniger Nahrung zu Gebote steht, und wo sie Entbehrungen und Leiden anderer Art ausgesetzt sind, dürften sich Ausnahmen von den aufgestellten Regeln zeigen. Bei solchen Individuen hören oft zuerst jene Zuckungen auf, die der directe Strom beim Öffnen der Kette bewirkt, ja bei einigen bleiben sogar die sonst stärkeren Zuckungen eher aus als die schwächeren, eine Anomalie, deren Untersuchungen *Nobili* den Physikern warm empfiehlt.

Die bisherigen Untersuchungen *Nobili's* beziehen sich auf den Cruralnerv allein, also einzig und allein auf das Nervensystem, und man kann billig fragen, wie sich die Sache verhalten wird, wenn mit dem Nerv zugleich der Muskel in den Kreis kommt. *Nobili's* Versuche geben auf diese Frage die Antwort: Das Gesetz der Contractionen bleibt dasselbe, man mag den Nerv allein oder den Nerv und den Muskel zugleich in die Kette bringen, nur in Betreff der Intensität findet ein kleiner Unterschied Statt. Die Zuckungen, die man bei Versuchen mit dem Nerv allein erhält, hören eher auf, als jene, die bei Anwendung des Nerves und des Muskels hervortreten, weil der blofsgelegte Nerv schneller austrocknet und seine Leitfähigkeit verliert, als jene Theile desselben, die in der Substanz des Muskels verzweigt sind, und durch sie gegen das Austrocknen geschützt werden. Übrigens verhält sich der Muskel bei den Zuckungen ganz leidend, und erhält seine Empfindlichkeit gegen den electrischen Strom allein vom Nerve. Diesem schon früher anerkannten Grundsatze hat *Nobili* durch einen neuen Versuch noch mehr Haltbarkeit gegeben. Bekanntlich liegen die Puncte der Frosch-

schenkel, welche sich unter der Einwirkung eines electrischen Stromes am meisten zusammenziehen, im dicken Fleische der Schenkel. *Nobili* leitete nun durch diese Puncte eines recht kräftigen Frosches einen sehr schwachen Strom, der, am Nerv angebracht, starke Bewegungen desselben erzeugt hätte, und bemerkte keine Spur einer Zuckung, wiewohl der Muskel an Leitfähigkeit dem Nerv nicht nachsteht, und auch die Gröfse der Berührungsfläche zwischen Fleisch und Metall einen günstigen Erfolg sollte erwarten lassen. Hätte der Muskel eine selbstständige Empfindlichkeit gegen den electrischen Strom, so hätten da die Zuckungen nicht ausbleiben können, und der Strom würde nicht eine Stärke brauchen, wie sie nothwendig ist, um zu den im Innern des Muskels gelegenen Verzweigungen des Nerves zu gelangen. Daher ist es begreiflich, dafs ein Muskel allein für sich durch einen starken Strom in Zuckungen versetzt werden mufs. Doch treten diese Zuckungen nur beim Schliefsen der Kette kräftig ein, beim Öffnen derselben erfolgen sie nur schwach, oder sie unterbleiben ganz, ja wenn man den electrischen Strom von dem dicken Fleische des einen Schenkels in dasselbe des anderen leitet, so tritt bei der Anwendung hinreichender Ströme während des Schliefsens eine ungemein kräftige Erschütterung ein, beim Öffnen ist eine solche nicht bemerkbar, aber doch sehr schwach.

Bisher wurden Ströme gebraucht, die von metallischen Electromotoren herrührten; ein nach *Galvani's* Methode präparirter Frosch kann aber, nach *Nobili*, selbst als Electromotor dienen, und mit einem homogenen Metalle oder einem feuchten Leiter in Zuckungen versetzt werden. Dieser Strom geht von den Füfsen des Frosches zum Rückenmark, ist sehr schwach, hält höchstens eine Viertelstunde an, und bewirkt bei schwachen

Individuen nur beim Schliefsen der Kette, bei starken hingegen sowohl beim Öffnen als beim Schliefsen Zuckungen; nur wenige Frösche zucken blofs beim Öffnen. Dafs diese Zuckungen nicht von einem Rückströmen der Electricität in dem Augenblicke der Unterbrechung der Kette herrühren, hat zwar schon *Marianini* bewiesen, *Nobili* zeigt aber auch die Unstatthaftigkeit dieser Annahme, indem, wenn sie die rechte Ursache bezeichnete, vielmehr beim Öffnen als beim Schliefsen der Kette die Zuckung eintreten müfste, nicht aber umgekehrt, wie es die Erfahrung nachweiset. Bei diesem Strome spielen die Muskeln der unteren Extremitäten die Rolle des negativen, der Cruralnerv hingegen die des positiven Electromotors, und wirken als solche länger, als die Erregbarkeit des Thieres dauert. Daher kommt es, dafs ein Multiplicator, nach *Nobili's* Construction, selbst im Kreise unempfindlich gewordener Frösche noch das Daseyn eines electrischen Stromes anzeigt, ferner dafs ein frisch präparirter Frosch mit einem lange vorher zugerichteten und bereits für die electrische Erregung unempfänglichen, mit den Extremitäten zu einem Kreise verbunden, in Zuckungen geräth, sobald beide in derselben Richtung mit einander verbunden sind, hingegen keine Spur davon blicken lassen, wenn sie einander entgegengesetzt sind. Im ersten Falle unterstützen sich nämlich die beiden Ströme, und bewirken natürlich in dem empfindlicheren Organe eine Zuckung, im letzteren wirken sie einander entgegen, und neutralisiren sich gegenseitig.

Nobili meint, die Endursache dieser Ströme im Frosche selbst liege in einer Temperaturdifferenz zwischen Nerv und Muskel, der Strom sey also ein thermo-electrischer, und leitet diese Differenz von einer Ungleichheit der Verdünstung der Flüssigkeit dieser beiden Or-

gane ab. Da der Muskel eine gröfsere Masse hat als der Nerv, mithin langsamer austrocknet als dieser, so mufs jener die Rolle des warmen, dieser die des kalten Leiters spielen.

Es ist merkwürdig, dafs bei der Einwirkung eines electrischen Stromes auf Frösche manches Individuum in eine Art Starrkrampf mit Convulsionen verfällt, bei anderen hingegen eine völlige Erschlaffung eintritt. In beiden Zuständen zucken die Glieder, nur erscheinen diese Zuckungen im ersten Falle mehr als Verzerrungen, im letzten mehr als Zusammenziehungen. Jene Convulsionen kann man auch künstlich herbeiführen, indem man die Kette schnell genug hinter einander öffnet und wieder schliefst, so dafs die von einer Berührung herrührende Contraction nicht vor Eintritt der durch die folgende erzeugten verschwinden kann, und so der gewöhnlich auf die Contraction folgenden Abspannung keine Zeit gestattet wird.

Nobili glaubt, durch diese Erfahrungen geleitet, näher in die Natur des Starrkrampfes einzugehen, und ein Heilmittel dieses schrecklichen Übels in der Electricität zu finden. Ein Nerv verliert seine Fähigkeit, in Zuckungen versetzt zu werden, durch einen continuirlichen electrischen Strom, ja solche Zuckungen sind selbst nur ein vorübergehender Starrkrampf. Man hat demnach beim Eintritt dieser, von einer übermäfsigen Exaltation des Nerves herrührenden, Krankheit nur die Erregbarkeit des Nerves durch einen continuirlichen Strom herabzusetzen. Anders müfste man bei Lähmungen verfahren, die in einem Mangel an Erregbarkeit der Nerven ihren Grund haben, und demnach bei diesen einen Strom mit Unterbrechungen anwenden.

B. Akustik.

Über die Empfindlichkeit des Gehörorgans. Von *F. Savart.*

(Ann. de Chim. et de Phys. Aug. 1830.*)*

Der tiefste Ton, den wir noch vernehmen können, zählt 30 Schwingungen für die Secunde, und sollte auch diese Angabe nicht ganz richtig seyn, so ist doch der Fehler nur gering; darüber sind die Physiker einig. Rücksichtlich der Grenze der Vernehmbarkeit hoher Töne, dem eigentlichen Gegenstande dieser Untersuchung, herrscht jedoch nicht dieselbe Übereinstimmung. *Chladni* nimmt als Grenze einen Ton von 12000 Schwingungen, *Biot* den einer offenen Pfeife von 10 Linien Länge, der also 8192 Schwingungen für die Secunde hat. *Wollaston* gesteht, dafs der höchste Ton, den er noch habe vernebmen können, der einer zolllangen Pfeife sey, da er aber nicht sagt, ob diese Pfeife offen oder gedeckt, und von welchem Durchmesser sie gewesen sey, so kann man über die Zahl der Schwingungen dieses Tones nichts bestimmen. An einer Stelle sagt er jedoch, dafs die höchsten vernehmbaren Töne von Schwingungen erzeugt werden, die eine sechs- bis siebenhundert Mal gröfsere Geschwindigkeit als die an der entgegengesetzten Grenze hätten; was also auf 18—20000 Schwingungen die Secunde hinauskäme. Kurz die ganze Geschichte der Physik, so viel weist das Gesagte nach, kennt keinen einzigen genauen Versuch über diesen Gegenstand, und seit *Sauveur* ist die Akustik in dieser Beziehung um nichts vorgeschritten.

Die Bedingungen zur Lösung dieser Frage lassen sich auf zwei zurückführen: die genaue Bestimmung der Anzahl der Schwingungen und die Erzeugung äufserst

hoher und doch hinreichend intensiver Töne. Mittelst cylindrischer, an beiden Enden freier, in Longitudinalschwingungen versetzter Stäbe kann man beiden Erfordernissen genügen. Denn die Gesetze dieser Art Bewegung sind genau bekannt und die Anzahl der Schwingungen daher leicht auszumitteln, und andererseits braucht man nur Körper von einer grofsen Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls, wie z. B. Glas oder Stahl, zu wählen, um auch bei einer geringen Länge sie noch bequem in Schwingungen versetzen und den Schall vernehmen zu können. Auf diese Weise hat *Savart* gefunden, dafs die meisten Menschen den Ton eines Glascylinders von 3 Millim. im Durchmesser und 159 Millim. in der Länge noch deutlich vernehmen, obgleich er ungefähr 31000 Schwingungen für die Secunde zählt. Bei Cylindern von noch kleinerem Durchmesser und ungefähr 150 Millim. Länge, die also 33000 Schwingungen für die Secunde gaben, vernahm bald *Savart* den Ton, bald nicht, je nachdem das Ohr in einem Momente empfänglicher als im andern, oder — wie er bescheiden äufsert — die Geschicklichkeit beim Behandeln des Stabes verschieden gewesen ist.

Auch bei in Transversalschwingungen versetzten Stahlstäben, obgleich die Intensität des Tones noch geringer und die Behandlung noch schwieriger ist, waren Töne von 30 — 32000 Schwingungen noch vernehmbar. Obgleich man bemerken mufs, dafs weil diese kleinen Stäbe mit einem ihrer Enden in eine Schraubzange eingezwängt waren, und folglich ihre Länge nicht mit Sicherheit ausgemittelt werden konnte, diese Zahlen nur als Annäherungen zu betrachten sind, wenn auch eben nicht viel von der Wahrheit abgehen wird.

Noch schwieriger wird es, die Anzahl der Schwingungen zu bestimmen, wenn man kleine Luftsäulen auf

die Art, wie in den Orgelpfeifen, in Bewegung zu setzen sucht. Das einzige Mittel, dessen man sich da mit Erfolg bedienen kann, ist, Röhren von ähnlicher Gestalt zu gebrauchen, um das Gesetz, dafs die Anzahl der Schwingungen gleichartiger Luftmassen den homologen Abmessungen verkehrt proportionirt sey, in Anwendung bringen zu können. Allein da die Öffnungen (Mundlöcher) ebenfalls den Dimensionen proportionirt bleiben müssen, und bei der Kleinheit der Pfeifen diese Bedingung durchaus nie mit Vollkommenheit hergestellt werden wird, so kann man bei diesem Verfahren die Zahl der Schwingungen nie über 20000 die Secunde steigen lassen, da über diese Grenze die Schwingungen, wo noch vernehmbar, doch immer unter einander vergleichbar bleiben.

Aus diesen ersten Versuchen scheint hervorzugehen, dafs das menschliche Ohr Töne, die über 32000 Schwingungen die Secunde zählen, nicht mehr vernehmen könne. Allein da man, um zu dieser Grenze zu gelangen, Körper von geringen Abmessungen, folglich kleinen Schwingungen und geringer Intensität des Schalles anwenden mufs, so bleibt noch immer unentschieden, ob der Ton darum unvernehmbar wird, weil er zu *schwach*, oder darum, weil er zu *schnell* ist.

Zur Lösung dieser Frage bediente sich *Savart* eines bald schneller, bald langsamer gedrehten, gezähnten Rades, dessen Zähne nach einander an einen kleinen Körper, z. B. an eine Karte oder eine dünne Holzplatte, der auf einer festen Unterlage ruhte, stofsen mufsten. Auf diese Weise erhielt man Töne, deren Höhe oder Tiefe, wie bei der Sirene *Cagniard-Latours*, von der gröfseren oder geringeren Zahl der in einer bestimmten Zeit vollbrachten Stöfse abhing, und wo man durch Vergröfserung des Durchmessers des Rades, unter Beibe-

haltung derselben Zähnezahl, die Intensität des Schalls und Reinheit der Töne vermehren, und die höchsten Töne der musikalischen Leiter ohne Abbruch der Intensität hervorbringen konnte.

Das erste Rad hatte 24 Centim. im Durchmesser und 360 Zähne, das zweite 48 Centim. im Durchmesser und 100 Zähne, das dritte 82 Centim. und 720 Räder. Mit dem letztern erhielt man vernehmbare Töne, auch wenn die Zahl der Stöſse 24000 überstieg, was also 48000 einfachen Schwingungen entspricht; und obgleich die Intensität des Schalles, die noch bei 12 — 15000 Stöſsen die Secunde bedeutend stark war, von da aus schnell zu sinken begann, so konnte doch der Punct, wo der Ton ganz unvernehmbar geworden wäre, mit *Savart's* Apparat nicht bestimmt werden, indem das Rad, welches dazu diente, das gezähnte in Bewegung zu setzen, keinen hinreichend groſsen Halbmesser hatte, um die entsprechende Drehungsgeschwindigkeit hervorbringen zu können.

Das Vermögen, so hohe Töne zu vernehmen, kommt ferner — gegen *Wollaston's* Ausspruch — allen Personen zu; wenigstens besaſsen es alle, die *Savard's* Versuchen beiwohnten. Dadurch will er aber nicht die von *Wollaston* zu Gunsten seiner Meinung angeführten Thatsachen zweifelhaft machen, nur müssen sie auf eine andere Art erklärt werden. Es kann nämlich ein hoher Ton von bestimmter Intensität von einigen Personen noch vernommen werden, von andern nicht; allein der Grund hiervon liegt nicht in dem Grade seiner Höhe, sondern in dem Grade seiner Intensität.

Aus *Savart's* Versuchen ging ferner hervor, daſs, wenn man fortfahren würde, den Durchmesser des gezähnten Rades und die Drehungsgeschwindigkeit bei gleich bleibender Zahl der Zähne zu vermehren, und

dadurch den Ton immer höher und doch zugleich einen vom andern getrennt, und daher genugsam intensiv erhielte *), man Töne hervorbringen könnte, die weit über 24000 Stöfse die Secunde zählten, und dennoch vernehmbar wären; allein bis jetzt wurden die Versuche, gröfstentheils wegen des hohen Kostenaufwandes, nicht weiter hinaufgetrieben.

Da die Anzahl der mittelst des Rades von 82 Centimeter im Durchmesser hervorgebrachten Schwingungen so grofs war, und der erzeugte Ton die bisher angenommene Grenze der vernehmbaren Töne so weit überschritt, so handelte es sich vor Allem 1) um genaue Bestimmung der Umläufe des gezähnten Rades, und 2) um Ausmittelung des Umstandes, ob nicht etwa auch der stofsende Körper in eine schwingende Bewegung gerathe, während welcher er z. B. nur je den zweiten, dritten u. s. w. Zahn treffen, und die andern auslassen könnte.

Die erste Schwierigkeit betreffend, ist, an der Axe (dem Wellbaume) des Rades einen Zähler anzubringen, bei grofser Geschwindigkeit nicht recht thunlich; besser ist es, die Zahl der Umläufe durch den Ton eines andern gezähnten Rades von geringerem Durchmesser und einer 30—40 Mal geringeren Anzahl Zähne zu bestimmen. Da dieser Ton viel tiefer als der des grofsen

---

*) Der hier erwähnte Einflufs der Vergröfserung des Durchmessers auf die Intensität des Schalles läfst sich durch einen einfachen Versuch nachweisen. Man construire ein durchbrochenes Rad mit einer grofsen Anzahl geradliniger Radien, und erzeuge einen Schall durch successive, gegen diese Radien ausgeübten Stöfse. Je weiter der stofsende Körper vom Mittelpuncte weg gegen das Ende der Radien geschoben wird, desto intensiver ist der Schall.

Rades ist, so ist es leicht, seinen Einklang auf einem Monochorde hervorzurufen, die entsprechende Anzahl der Schwingungen, und hieraus die der Umläufe des grofsen Rades zu berechnen.

Die zweite Schwierigkeit löst sich auf doppelte Art. Entweder man bringt auf derselben Axe eine Anzahl gezähnter Räder an, von demselben Durchmesser und derselben Dicke, deren Zähnezahl aber in einfachen, harmonischen Verhältnissen unter einander stehen, und sieht, ob bei gleicher Drehungsgeschwindigkeit der durch den Stofs der Zähne dieser Räder an verschiedene kleine Körper hervorgebrachte Accord wirklich der sey, der sich aus den Zahlen der Zähne ergibt; oder, was noch einfacher ist, man läfst senkrecht auf die Ebene des Rades mittelst eines Rohres von hinlänglich kleinem Durchmesser einen Luftstrom auf die Zähne des Rades fallen, aus welcher Anordnung eine der Sirene *Cagniard-Latours* analoge Wirkung entspringen wird, dafs sich nämlich durch den Stofs, den die aus der Röhre dringende Luft, so oft der Zwischenraum der Zähne ihr freien Ausgang aus der sonst durch die Zähne verdeckten Öffnung gestattet, gegen die äufsere Luft ausübt, ein Schall erzeugen wird. Dieser Schall mufs genau dem durch den Stofs der Zähne gegen einen dünnen Körper erzeugten entsprechen, falls wirklich dieser Körper jeden Zahn berührt, keinen ausläfst. Beide diese Methoden wurden nun angewendet, und beide gaben das gewünschte Resultat. Räder, deren Zähne im Verhältnifs von 200:250:300:400 zu einander standen, gaben den reinsten Accord, eben so wurde durch die successiven Luftstöfse und den Stofs des Rades an den dünnen Körper derselbe Ton erzeugt; man konnte also sicher seyn, dafs der Körper keinen Zahn auslasse.

Die Frage über die Grenze der Vernehmbarkeit der

Töne hängt auch mit einer andern enge zusammen, nämlich wie lange ein Ton andauern muſs, um als ein ausgehaltener und mit andern Tönen vergleichbarer erscheinen zu können; denn ein sehr hoher Ton, der dennoch mit andern soll verglichen werden können, muſs oder kann als das Resultat einer Folge von Klängen oder Tönen betrachtet werden, die nur ein Moment dauern, und doch, jeder für sich, einen Eindruck auf das Gehörorgan hervorbringen würden.

Die letzterwähnten Mittel zur Tonerzeugung sind auch ganz zur Lösung dieser Frage geeignet. Der Ton z. B., den ein Rad mit 1000 Zähnen und einem Umlauf in der Secunde hervorbringt, bleibt — wie auch die Erfahrung bestätiget — derselbe, wenn man alle Zähne der einen halben Peripherie wegnimmt, denn noch immer werden, wie vorher, in einer halben Secunde 500 Stöſse gemacht; nur folgt auf den Ton eine halbe Secunde völliger Stille, wenn anders der auf das Organ gemachte Eindruck mit der Ursache, die ihn hervorgebracht hat, vergeht. Wirklich verhielt es sich so; man konnte was immer für eine Zahl Zähne wegnehmen, der Ton blieb derselbe, nur war er durch eine gröſsere oder geringere Stille, je nach der Zahl der weggenommenen Zähne, unterbrochen. *Savart* verfertigte sich einen Apparat mit beweglichen Zähnen, nahm alle Zähne weg bis auf zwei, und doch blieb der Ton ungeändert, wie man sich leicht durch das Antönen seines Einklangs *(unison)* überzeugte. Aus diesem Versuche geht hervor: 1) daſs zwei auf einander folgende Stöſse, folglich vier Schwingungen hinreichen, einen vergleichbaren Ton zu bilden; 2) daſs der Zeitraum zwischen den beiden Stöſsen die Höhe des Tones bestimmt, z. B. zwei Stöſse, die in einem doppelt so groſsen Zeitraum auf einander folgen, geben die nächst niedere Octave, die in einem drei Mal kleineren

die Quinte der nächst höheren Octave, u. dgl. m.; 3) daſs die zur Vernehmbarkeit des Tones nöthige Dauer desselben einzig und allein von dem Zeitraume zwischen den zwei ihn bildenden Stöſsen abhängt, und daſs folglich diese Zeit desto kürzer, je höher der Ton ist. Da wir also gefunden haben, daſs unser Ohr noch einen von 10000 Stöſsen (20000 einfachen Schwingungen) erzeugten Ton zu vernehmen im Stande sey, so folgt daraus, daſs dieses Organ noch alle Einzelnheiten eines Phänomens, das bloſs $^1/_{5000}$ einer Secunde dauerte, vernehmen könne. Doch muſs bemerkt werden, daſs diese Folgerung vielleicht nicht gar so richtig ist, da es doch auch geschehen kann, daſs die in dem letzt getroffenen Zahne hervorgebrachte Erschütterung noch einige Zeit nach dem Stoſse fortdauere; allein jeden Falls ist diese Zeit, wenn die sich stoſsenden Körper, wie im gegenwärtigen Falle, geringe Dimensionen haben, äuſserst klein.

Läſst man auf der Peripherie des Rades nur einen Zahn, so gibt der bei jedem Umlauf eintretende Eine Stoſs einen Ton, dessen Höhe oder Tiefe in gar keinem Zusammenhange mit dem bei zwei oder mehreren Zähnen erhaltenen steht. Er bleibt stets derselbe, was auch die Drehungsgeschwindigkeit sey, was natürlich daher rührt, daſs immer dieselben zwei Körper stets in denselben Dimensionen an einander stoſsen. Nur muſs man berücksichtigen, daſs wenn die Zahl der Umläufe des Rades 32 die Secunde übersteigt, die periodische Wiederkehr des Stoſses des Zahnes einen eigenen, anhaltenden Ton erzeugt, der mit der Zahl der Umläufe immer an Höhe zunimmt.

Da also ein einziger Stoſs für sich einen vernehmbaren Schall oder Klang erzeugt, und andererseits, wie wir oben gesehen haben, das Ohr noch Töne vernehmen kann, die aus ungefähr 24000 Stöſsen die Secunde

hervorgehen, so könnte man daraus folgern, daſs ein Ton oder Klang, der nur $^1/_{24000}$ einer Secunde dauert, vernehmbar, wenn auch nicht mehr vergleichbar ist; allein auch hier muſs berücksichtiget werden, daſs die Bewegung auch nach dem Stoſse fortdauern, folglich in der Bestimmung der Dauer des Tones ein Irrthum eingetreten seyn kann.

Auch verdient hier die Bemerkung einen Platz, daſs die Dauer des Phänomens, das die Schallempfindung hervorbringt, wohl von der Dauer der Empfindung selbst unterschieden werden muſs; denn der auf ein Organ gemachte Eindruck überdauert die Ursache, die ihn hervorgebracht hat. *Savart* bemühte sich nun die Zeit zu finden, um welche die Empfindung länger als die sie erzeugende Ursache währt, und die gezähnten Räder bieten wiederum ein leichtes Mittel, das Problem zu lösen.

Nehmen wir also an, daſs man einem Rade von gleichförmiger und bekannter Drehungsgeschwindigkeit einen Zahn nehme; nothwendig muſs daraus, wenn die Empfindung anders nicht auch nach dem Aufhören der erzeugenden Ursache besteht, eine Unterbrechung des Tones entstehen, und selbst die Zeit, um welche die Empfindung ihren Grund überdauert, muſs aus der Zahl der Zähne entnommen werden können, die man bis zur Wahrnehmung einer Unterbrechung wegnehmen muſs. *Savart* wiederholte derlei Versuche zu verschiedenen Malen; stets gewann er die Überzeugung, daſs der Eindruck länger als die Ursache desselben dauere, allein nie war es ihm möglich zu einer genauen Bestimmung zu gelangen; denn da der Eindruck allmählich erlischt, so kann man, wenn er bereits sehr schwach geworden ist, nie mit Sicherheit angeben, ob er noch bestehe oder nicht. Auch meint *Savart*, dürfte die Empfänglichkeit seines Gehörorgans nicht stets dieselbe gewesen seyn, denn einige Male konnte er mehr, andere Male durfte er nur weniger Zähne wegnehmen, ehe eine Unterbrechung des Schalles eintrat. Auch stimmten die bei *Savart's* Versuchen Anwesenden in ihren Beurtheilungen durchaus nicht überein.

Sicher ist, daſs wenn ein Ton als ausgehalten erscheinen soll, der Eindruck eines jeden Stoſses mit einer bestimmten Intensität bis zum Gelangen des Eindru-

ckes des nächsten Stoſses zu unserem Ohre andauern muſs, denn sonst würde man den durch jeden einzelnen Stoſs erzeugten Klang gesondert vernehmen. Wenn man also einem Rade mit wenig Zähnen eine drehende Bewegung von anfänglich kleiner, dann aber stets wachsender Geschwindigkeit mittheilt, so unterscheidet man zuerst deutlich die von jedem Stoſse der einzelnen Zähne gegen einen kleinen Körper erzeugten Töne von einander, dann beginnt man einen Ton zu hören, den man zerrissen nennen könnte, wenn man so sagen darf, und der dadurch entsteht, daſs das Ende eines Eindruckes mit dem Beginne des nächsten zusammenflieſst, wenn endlich die Stöſse mit gröſserer Schnelligkeit einander folgen, so wird der Ton sehr rein und erlangt viel Intensität; allein diese Intensität nimmt wieder ab und der Ton verschwindet endlich ganz, wenn die Geschwindigkeit sehr groſs wird, ohne Zweifel, weil da die Stöſse nicht mehr rein hervorgebracht werden. Mit einem Worte, zur Empfindung eines vollen und anhaltenden Tones ist es unerläſslich, daſs die auf das Gehörorgan geschehenden Eindrücke bis auf eine bestimmte Grenze in einander flieſsen. Dieſs ist wahrscheinlich die Ursache, warum man nach Maſsgabe, als man höhere Töne erzeugen will, den Durchmesser des Rades vergröſsern muſs; man thut da nämlich nichts anderes, als man vermindert die Dauer eines Schlages; im Gegentheile scheint es auſser Zweifel, daſs man noch tiefere Töne als von 30 — 32 Schwingungen die Secunde erzeugen könnte, wenn man ein Mittel wüſste, Erschütterungen hervorzubringen, deren Eindruck über $^1/_{16}$ Secunde währte.

Zum Schlusse diene die Bemerkung, daſs die mittelst eines gezähnten Rades hervorzubringenden Töne mit gutem Erfolge zur Bestimmung der Umläufe der Wellbäume einer groſsen Anzahl Maschinen, so wie zur Prüfung der Regelmäſsigkeit ihres Ganges, angewendet werden dürften.

Meteorologische Beobachtungen. September 1830.

Der Beobachtungsort liegt 101.7 W. F. über dem mittlern Spiegel der Donau.

Tag.	Um 8 Uhr früh.			Um 3 Uhr Nachmittag.			Um 10 Uhr Abends.			Witterung.
	Barometer 0° R.	Thermometer.	Wind.	Barometer 0° R.	Thermometer.	Wind.	Barometer 0° R.	Thermometer.	Wind.	
	Paris. Z.	Grad R.		Paris. Z.	Grad R.		Paris. Z.	Grad. R.		
1	27.786	11.0	WNW. schw.	27.762	16.0	NW. schw.	27.772	11.5	NW. schw.	Sonne mit Wolken.
2	27.768	12.5	WNW. schw.	27.730	16.0	NW. schw.	27.647	11.6	S. schwach.	Sonne mit Wolken.
3	27.527	11.0	NW. still.	27.419	19.0	N. still.	27.333	15.0	NNW. still.	Sonne mit Wolk. u. Reg.
4	27.314	13.0	NW. schw.	27.336	14.7	NW. schw.	27.310	10.0	WNW. schw.	Trüb und Regen.
5	27.279	11.7	NW. stark.	27.336	13.2	W. mittelm.	27.402	8.9	W. schwach.	Sonne mit Wolken.
6	27.433	10.4	W. schwach.	27.397	15.5	S. mittelm.	27.405	11.9	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
7	27.420	10.0	WNW. schw.	27.405	10.0	W. schwach.	27.412	9.0	W. schwach.	Trüb und Regen.
8	27.406	10.0	W. schwach.	27.407	14.0	NW. schw.	27.421	9.0	NW. schw.	Sonne mit Wolken.
9	27.373	9.2	NNW. schw.	27.295	9.0	WNW. schw.	27.278	8.0	WNW. schw.	Trüb und Regen.
10	27.295	10.0	WNW. mitt.	27.373	15.0	WNW. schw.	27.424	10.5	W. schwach.	Sonne mit Wolken.
11	27.448	10.0	W. still.	27.415	18.0	SO. schwach.	27.323	12.0	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
12	27.262	11.0	SO. schwach.	27.246	9.0	W. mittelm.	27.218	8.0	W. stark.	Trüb und Regen.
13	27.145	9.4	W. schwach.	27.110	11.6	W. mittelm.	27.108	8.5	W. mittelm.	Trüb und Regen.
14	27.123	8.0	W. stark.	27.207	11.0	WNW. mitt.	27.306	9.0	WNW. schw.	Trüb und Regen.
15	27.376	10.6	W. still.	27.501	13.0	NW. schw.	27.563	9.0	WNW. schw.	Sonne mit Wolken.
16	27.559	8.5	SW. still.	27.592	15.0	SSW. still.	27.626	11.0	SW. still.	Sonne mit Wolken.
17	27.637	12.0	S. still.	27.639	18.0	OSO. schw.	27.549	13.0	SO. mittelm.	Sonne mit Wolken.
18	27.470	12.2	OSO. mitt.	27.399	18.0	OSO. mitt.	27.368	14.0	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
19	27.535	13.0	W. schwach.	27.535	16.0	W. schwach.	27.545	12.0	WSW. still.	Sonne mit Wolken.
20	27.535	11.0	WNW. schw.	27.414	16.0	SSW. still.	27.367	11.5	W. still.	S. m. W., Gewit. Morg.
21	27.321	12.0	WNW. schw.	27.230	18.0	SO. mittelm.	27.121	12.0	SO. stark.	Sonne mit Wolken.
22	27.048	12.0	S. stark.	27.058	15.0	SO. stark.	27.186	10.0	SW. schw.	Trüb und Regen.
23	27.350	9.0	W. still.	27.440	12.0	WNW. stark.	27.544	9.0	W. still.	Sonne mit Wolken.
24	27.670	10.0	W. schwach.	27.635	16.0	W. still.	27.605	10.0	W. still.	Sonne mit Wolken.
25	27.507	9.0	NW. schw.	27.465	7.0	NW. mitt.	27.505	6.0	NW. schw.	Trüb und Regen.
26	27.544	8.0	NW. schw.	27.609	8.0	WNW. mitt.	27.688	6.0	NW. stark.	Trüb und Regen.
27	27.808	7.0	NW. mittelm.	27.859	9.0	WNW. schw.	27.859	7.8	WNW. schw.	Trüb und Regen.
28	27.822	9.2	NW. schw.	27.722	15.0	NW. still.	27.631	9.8	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
29	27.622	10.0	SO. schwach.	27.550	13.0	SO. mittelm.	27.519	9.5	S. schwach.	Sonne mit Wolken.
30	27.513	10.0	S. still.	27.505	14.0	S. still.	27.536	10.0	S. still.	Sonne mit Wolken.
Mittel	27.463	10.36		27.453	13.83		27.452	10.12		

Meteorologische Beobachtungen. October 1830.

Der Beobachtungsort liegt 101.7 W. F. über dem mittlern Spiegel der Donau.

Tag.	Um 8 Uhr früh.			Um 3 Uhr Nachmittag.			Um 10 Uhr Abends.			Witterung.
	Barometer o'' R.	Thermometer	Wind.	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	
	Paris. Z	Grad R.		Paris. Z.	Grad R.		Paris. Z,	Grad R.		
1	27.603	11.0	WNW. still.	27.622	13.4	WNW. still.	27.698	10.0	WNW. still.	Son. m. W., Morgenreg.
2	27.717	10.0	WNW. schw.	27.709	14.4	N. still.	27.715	10.0	N. still.	Sonne m. W. und Nebel.
3	27.710	10.2	N. still.	27.724	12.2	N. schwach.	27.758	9.5	N. still.	Sonne m. W. und Nebel.
4	27.767	10.0	NW. still.	27.757	13.2	WNW. still.	27.726	9.8	NW. still.	Sonne m. W. und Nebel.
5	27.690	10.5	WNW schw.	27.633	12.0	NNW. still.	27.581	8.5	WNW. still.	Sonne, Wolken, Regen.
6	27.618	6.0	WNW. mitt.	27.627	11.0	WNW. schw.	27.677	6.0	WNW. stark.	Hagel (Morg. 2U), S.W.
7	27.622	7.0	WNW. mitt.	27.628	9.0	WNW. stark.	27.672	7.0	WNW. stark.	Trüb, Regen.
8	27.751	8.0	WNW. mitt.	27.789	9.0	NW. mitt.	27.792	7.0	WNW. mitt.	Sonne mit Wolken.
9	27.839	7.0	WNW. mitt.	27.840	10.0	WNW. schw.	27.879	7.5	WNW. mitt.	Sonne, Wolken, Regen.
10	27.806	8.4	W. stark.	27.785	8.2	W. mittelm.	27.774	7.5	NW. mittelm.	Trüb, Regen.
11	27.750	7.8	NW. schw.	27.711	10.7	N. schwach.	27.666	6.5	WNW. schw.	Sonne mit Wolken.
12	27.632	8.0	WNW. schw.	27.751	6.4	NW. schw.	27.709	4.5	NW. schw.	Trüb und Regen.
13	27.831	2.0	NW. schw.	27.867	6.0	WNW. schw.	27.866	2.8	NW. schw.	Sonne mit Wolken.
14	27.876	3.2	WNW. schw.	27.861	6.0	N. schwach.	27.866	2.7	NW. still.	Sonne mit Wolken.
15	27.816	4.0	WNW. schw.	27.752	8.3	WNW. still.	27.747	6.0	WNW. still.	Sonne mit Wolken.
16	27.703	5.0	WNW. schw.	27.720	8.0	NW. schw.	27.799	6.0	NW. schw.	Sonne mit Wolk. u. Reg.
17	27.830	7.0	NW. schw.	27.862	9.0	NW. schw.	27.896	6.5	NW. still.	Sonne mit Wolken.
18	27.943	5.4	WNW. schw.	27.890	11.0	SO. schwach.	27.896	5.5	W. still.	Heiter.
19	27.916	2.0	WSW. schw.	27.893	9.0	S. schwach.	27.853	4.4	S. still.	Heiter.
20	27.919	3.0	S. schwach.	27.915	10.4	OSO. schw.	27.912	4.2	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
21	27.988	2.0	NNW. schw.	27.987	7.0	NNW. still.	28.023	3.1	NNW. still.	Sonne mit Wolken.
22	28.033	2.0	NNW. schw	28.030	9.0	WNW. still.	27.973	3.9	NNW. still.	Sonne mit Wolken.
23	27.948	3.0	WNW. schw.	27.887	8.5	SW. still.	27.817	6.8	W. mittelm.	dto. und dichter Nebel.
24	27.828	9.0	WNW. schw.	27.875	9.0	NW. schw.	27.876	6.8	WNW. schw.	Son. m. W., Morgenreg.
25	27.886	6.0	N. schwach.	27.856	10.0	SO. schwach.	27.716	5.0	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
26	27.516	5.0	SW. schw.	27.418	10.0	S. schwach.	27.351	5.2	SW. schw.	Trüb und Regen.
27	27.560	4.0	WNW. mitt.	27.713	6.0	WNW. mitt.	27.731	4.5	WNW. mitt.	Sonne mit Wolken.
28	27.687	7.2	WNW. stark.	27.621	8.0	WNW. schw.	27.509	6.0	SW. mittelm.	Sonne mit Wolken.
29	27.344	9.3	WNW. stark	27.172	13.0	W. mittelm.	27.274	6.8	W. mittelm.	Sonne mit Wolk. u. Reg.
30	27.289	7.0	W. schwach.	27.312	7.2	W. schwach.	27.416	4.6	WNW. mitt.	Trüb, Regen.
31	27.416	2.0	NW. schw.	27.637	6.0	WNW. mitt.	27.660	2.5	WNW. schw.	Sonne mit Wolken.
Mittel	27.737	5.11		27.737	9.43		27.737	6.97		

Meteorologische Beobachtungen. November 1830.

Der Beobachtungsort liegt 101.7 W. F. über dem mittlern Spiegel der Donau.

Tag.	Um 8 Uhr früh.			Um 3 Uhr Nachmittag.			Um 10 Uhr Abends.			Witterung.
	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	
	Paris. Z.	Grad R.		Paris. Z.	Grad R.		Paris. Z.	Grad R.		
1	27.534	5.4	WNW. stark.	27.651	10.0	WNW. schw.	27.662	5.0	WNW. mitt.	Sonne mit Wolken.
2	27.596	9.0	WNW. stark.	27.599	11.2	WNW. stark.	27.659	8.8	WNW. schw.	Sonne mit Wolken.
3	27.710	8.0	WNW. still.	27.781	12 5	SO schwach.	27.745	5.0	SO. mittelm.	Sonne mit Wolken.
4	27.781	3.0	SO. schwach.	27.769	8.2	SW. still.	27.761	4.0	SW. schwach.	Sonne mit Wolken.
5	27.810	3.0	SW. still.	27.820	6.0	SSW. still.	27.819	2.0	SW. schw.	Trüb.
6	27.784	1.5	SO. schwach.	27.741	6.0	SSO. schw.	27.716	2.0	SO. schwach.	Trüb.
7	27.574	3.2	SO. schwach.	27.455	9.4	S. mittelm.	27.377	5.2	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
8	27.511	2.4	SO. schwach.	27.499	6.0	SO. schwach.	27 518	3.0	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
9	27.536	3.2	SO. still.	27.541	7.0	SO. schwach.	27.600	4.0	SO. schwach.	Trüb.
10	27.628	4.4	WNW. schw.	27.599	10.0	WNW. schw.	27.585	4.5	WNW. still.	Sonne mit Wolken.
11	27.591	7.2	WNW. still.	27.603	9.0	WNW. schw.	27.577	5.8	WNW. schw.	Sonne mit Wolken.
12	27.555	7.2	WNW. schw.	27.600	6.2	WNW. schw.	27.680	4.0	WNW. schw.	Trüb u. Reg. Nachts heit.
13	27.807	3.3	NW. schw.	27.717	6.0	N. schwach.	27.708	4.5	N. schwach.	Sonne mit Wolken.
14	27.696	5.2	N. still.	27.640	7.0	SSO. schw.	27.646	4.0	SO. schwach.	Trüb.
15	27.574	5.0	SO. schwach.	27.617	9.0	SO. schwach.	27.665	3.5	SO. still.	Sonne m. Wolk. u. Nebel
16	27.712	4.0	SO. still.	27.632	7.0	SO. mittelm.	27.565	4.0	SO. schwach.	Sonne m. Wolk. u. Nebel
17	27.441	5.2	SO still.	27.350	10.0	SO. schwach.	27.314	5 6	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
18	27.421	6.0	S. still.	27.481	7.2	W. still.	27.502	4.8	W. schwach.	Trüb und Regen.
19	27.508	6.2	WNW. schw.	27.557	6.2	WNW. mitt.	27.634	4.0	WNW. schw.	Trüb und Regen.
20	27.665	5.0	WNW. schw.	27.642	6.0	WNW. schw.	27.643	3.5	WNW. schw.	Sonne mit Wolken.
21	27.651	3.4	WNW. stark.	27.637	6.0	WNW. mitt.	27.694	2.0	WNW. mitt	Sonne mit Wolken.
22	27.646	2.0	WNW. schw.	27.622	5.0	NW. schw.	27.572	2.5	WNW. schw.	Sonne mit Wolken.
23	27.491	6 0	W. stark.	27.523	4.0	NW. schw.	27.565	1.5	NW. schw.	dto. Nachts Schnee.
24	27.649	1.8	NW. schw.	27.714	4.2	N. mittelm.	27.741	1.0	NW. mittelm.	Trüb.
25	27.727	2.2	NNW. schw.	27.710	3.0	NW. schw.	27.712	0.5	NW. schw.	Trüb u. schw. Schnee.
26	27.682	1.0	N. schwach.	27.622	0.0	N. stark.	27.585	— 1.0	N. mittelm.	Trüb, Nachts Schnee.
27	27.565	0.0	NW. schw.	27.545	1.0	N. schwach.	27.470	— 0.8	N. schwach.	Trüb.
28	27.560	0.0	NW. schw.	27.596	2.0	SO. still.	27.656	0.5	SO. mitteln.	Trüb.
29	27.659	1.2	SO. stark.	27.640	2.0	SO. stark.	27.682	0	SO. stark.	Trüb, stürmisch.
30	27.672	1.2	SO. stark.	27.613	2 0	OSO. stark.	27.621	— 0.2	SO. mittelm.	Trüb
Mittel	27.625	3.87		27.617	6.31		27.622	3.11		

Fig. 1.

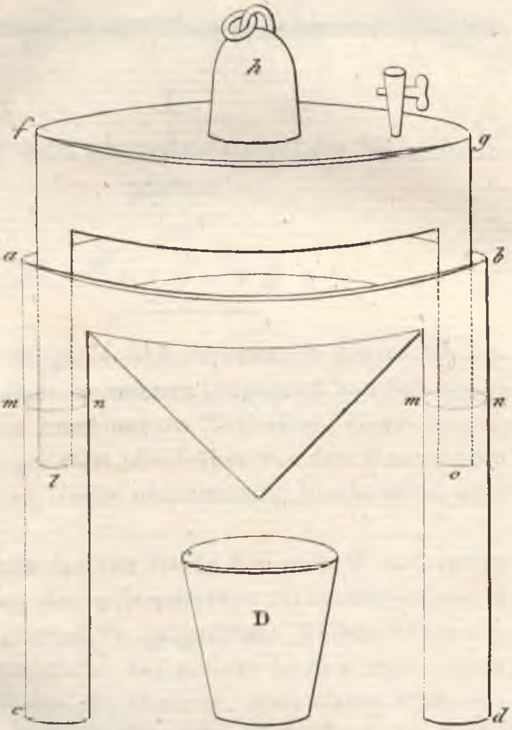
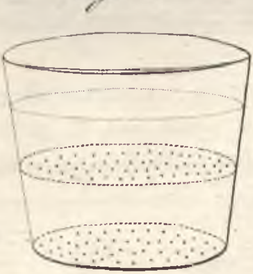


Fig. 2.



A. R.